

Paweł Strumiłło

Wstęp do komputerowej analizy obrazów (5)

Zadanie nr 13 – Studia podyplomowe: „Przetwarzanie i analiza
obrazów biomedycznych”



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Prezentacja multimedialna
współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
w projekcie

*„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń
– zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej –
zarządzanie Uczelnią,
nowoczesna oferta edukacyjna
i wzmacniania zdolności do zatrudniania
osób niepełnosprawnych”*

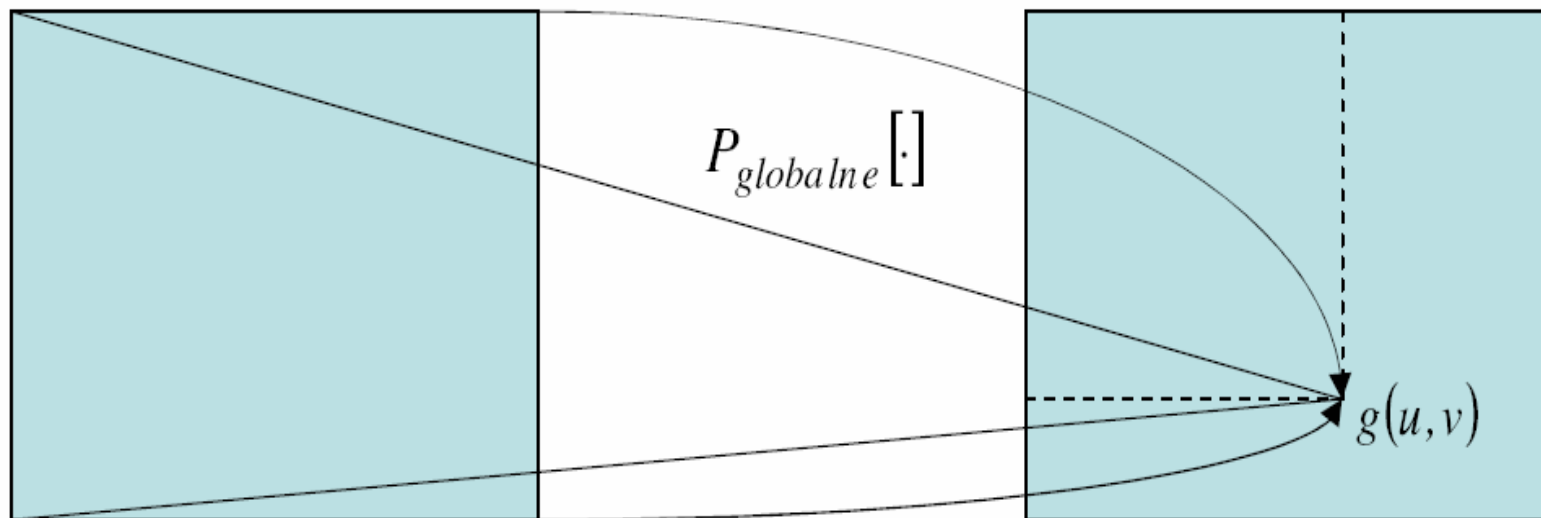


Politechnika Łódźka
Instytut Elektroniki

90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116,
tel. 042 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl



PRZEKSZTAŁCENIA GLOBALNE OBRAZU





Przekształcenia globalne obrazu

- **przekształcenie obrazu do innej dziedziny, zwanej widmem obrazu:**
np. przekształcenie Fouriera, Hougha, Karhunenena-Loevego,...

Cele: obrazowanie treści niewidocznych w dziedzinie przestrzennej obrazu,
przetworzenie do postaci bardziej dogodnej do kompresji (JPEG),
projektowanie filtrów obrazu w dziedzinie widma.

- **przekształcenia geometryczne obrazu:**

Cele: redukcja zniekształceń geometrycznych obrazu,
powiększanie i zmniejszanie obrazu,
przesunięcia i obroty obrazu.





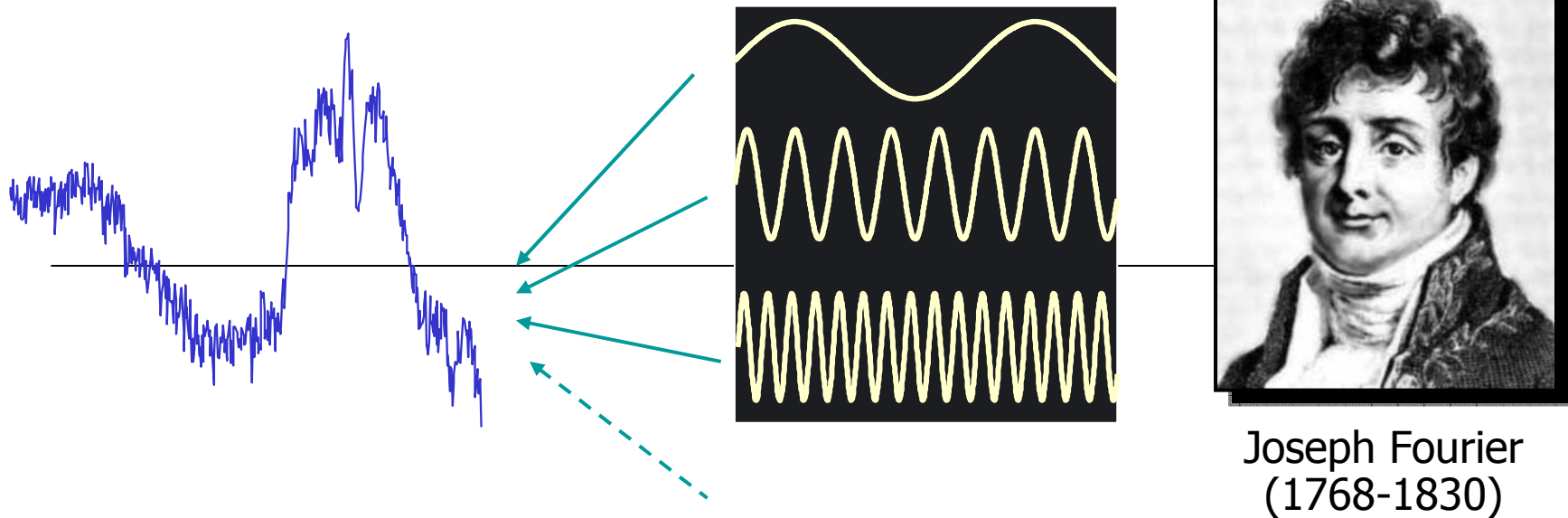
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Szereg Fouriera



Szeroka klasa sygnałów może być reprezentowana za pomocą kombinacji liniowej funkcji harmoniczných o różnych częstotliwościach – tzw. **szereg Fouriera**

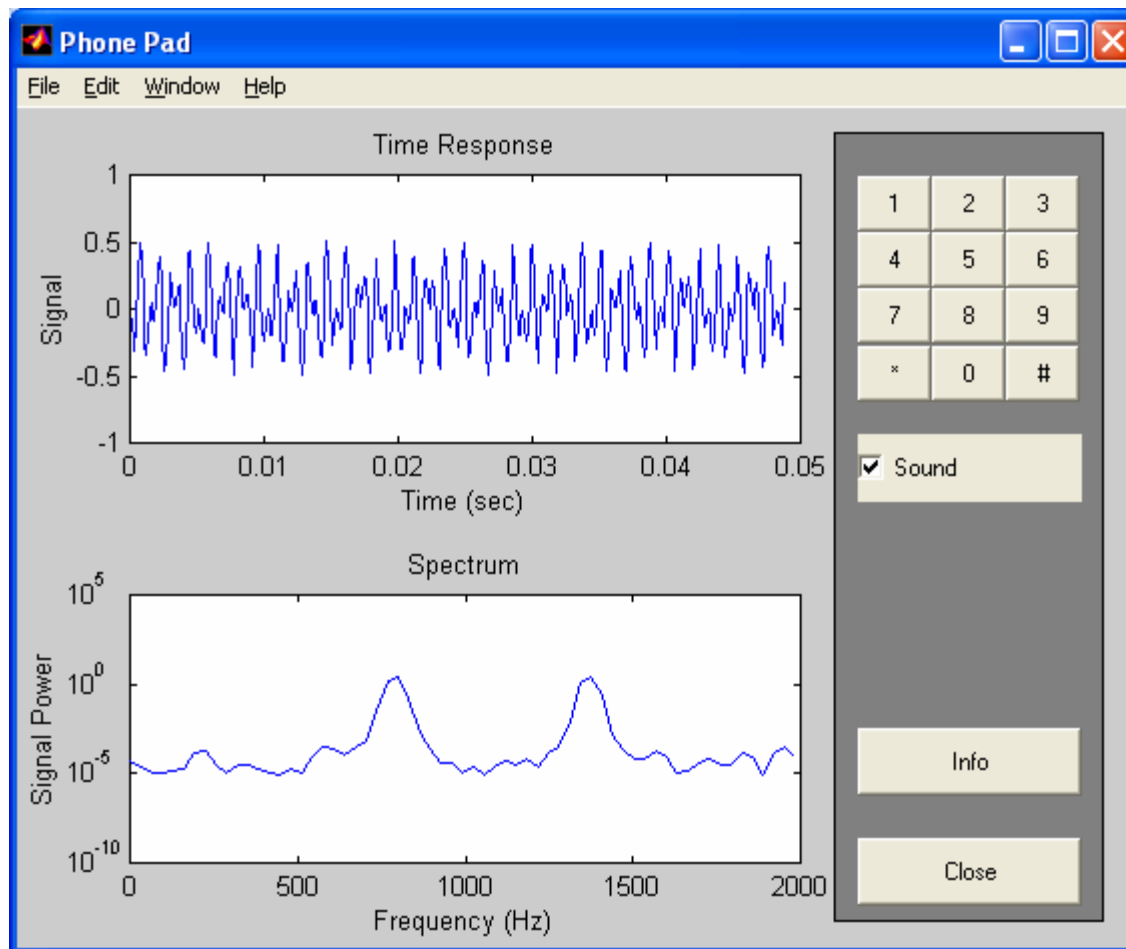


Politechnika Łódzka
Instytut Elektroniki

P. Strumiłło, Wstęp do komputerowej analizy obrazów (5)

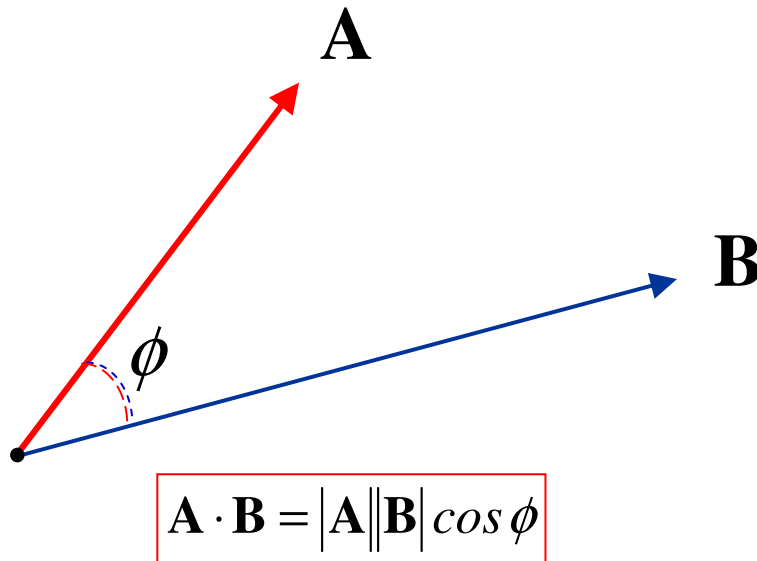


Wybieranie tonowe (DTMF - Dual Tone Multi Frequency)





Powtórka: Iloczyn skalarny wektorów

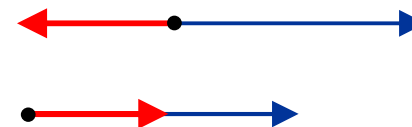


**Iloczyn skalarny
wektorów jest liczbą!**

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ dla $\phi = 90^\circ$ tj. dla wektorów prostopadłych (ortogonalnych)

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \min < 0$ dla $\phi = 180^\circ$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \max > 0$ dla $\phi = 0^\circ$



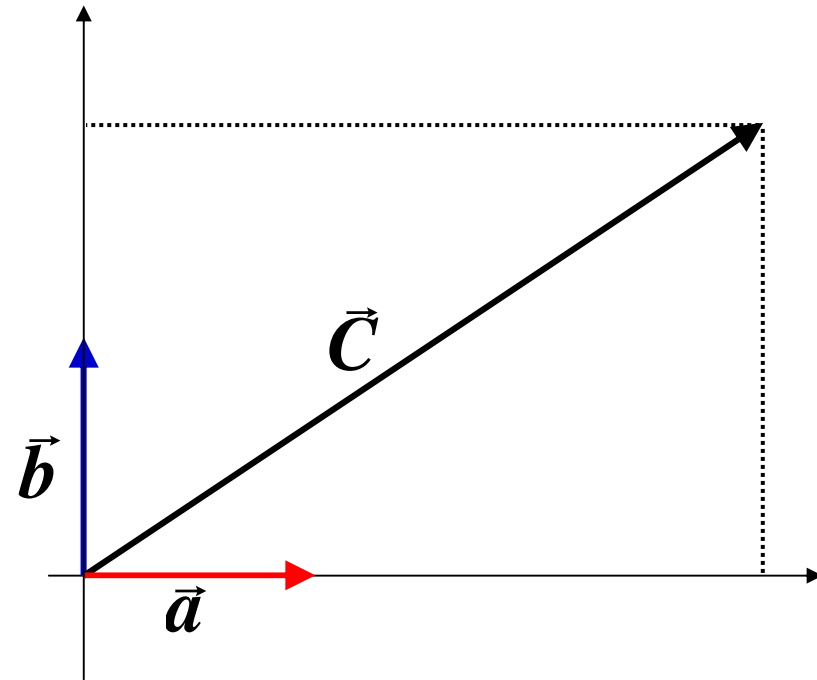


Wektory bazowe

Problem: Chcemy przedstawić dowolny wektor $\vec{C}$ na płaszczyźnie za pomocą wektorów bazowych $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o jednostkowych długościach

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$



Wektory prostopadłe (ortogonalne)



Wektory bazowe

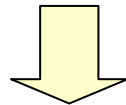
Teza:

$$\vec{C} = (\vec{a} \cdot \vec{C})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{C})\vec{b}$$

Dowód:

$$(\vec{a} \cdot \vec{C})\vec{a} = (|\vec{a}||\vec{C}|\cos\alpha)\vec{a} = A\vec{a}$$

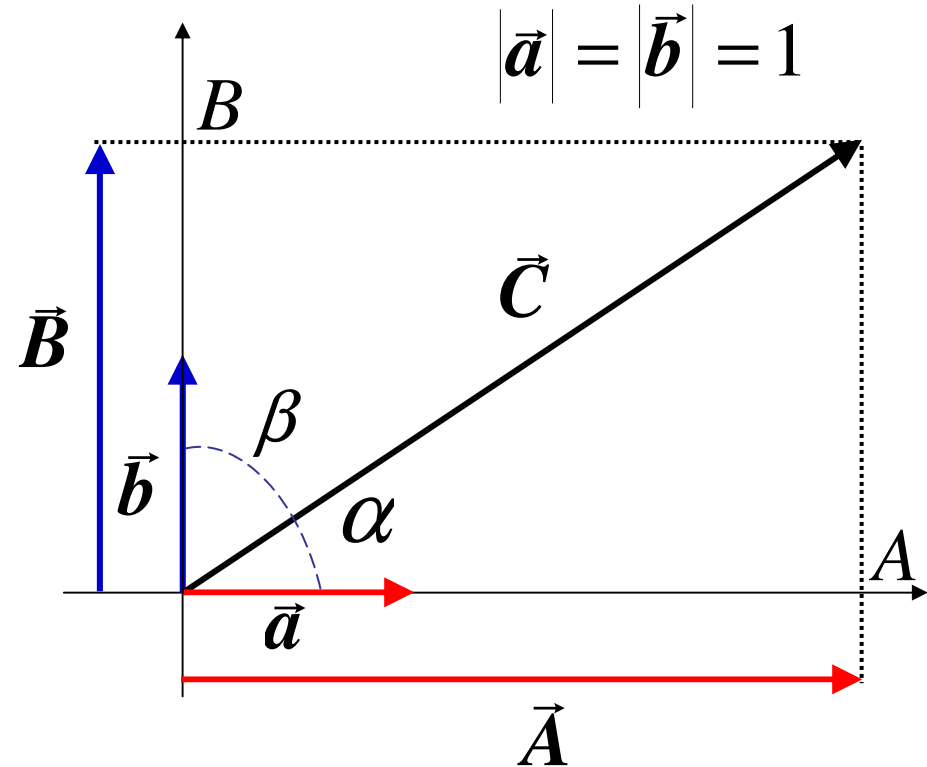
$$(\vec{b} \cdot \vec{C})\vec{b} = (|\vec{b}||\vec{C}|\cos\beta)\vec{b} = B\vec{b}$$



$$\vec{C} = A\vec{a} + B\vec{b} = \vec{A} + \vec{B}$$

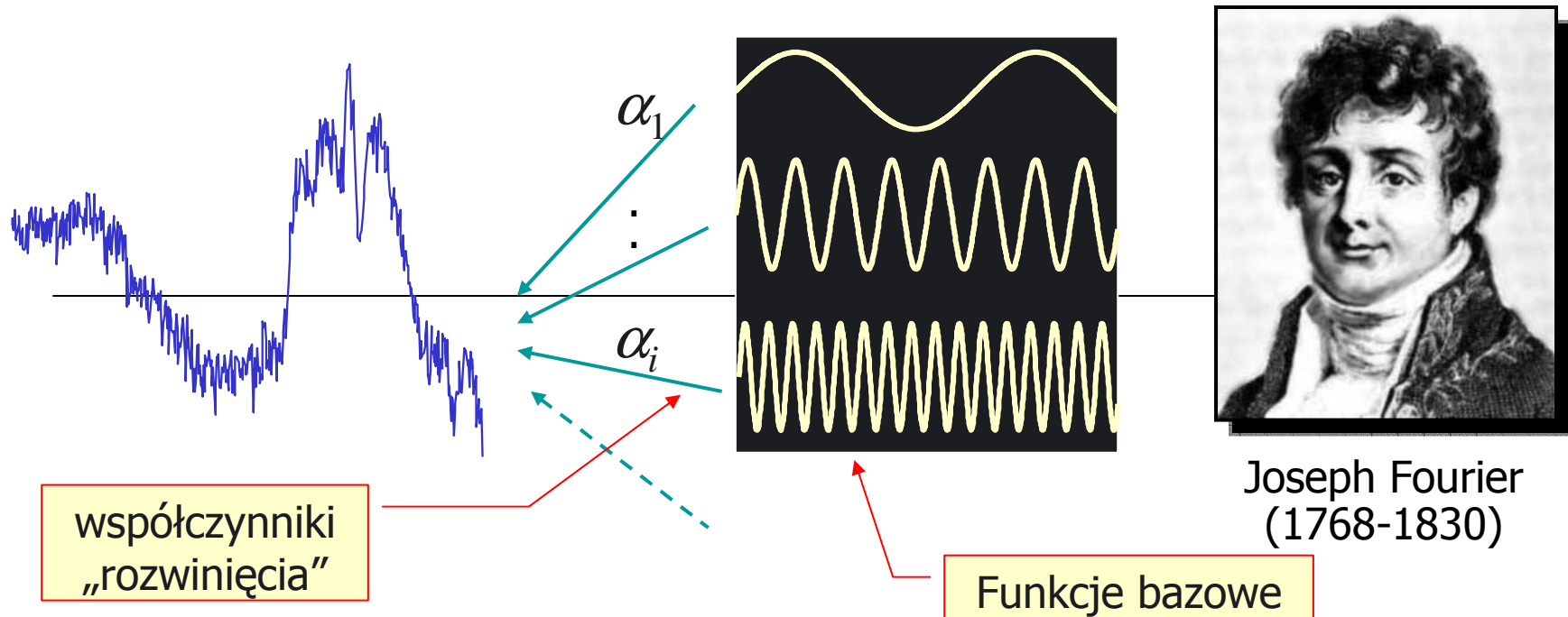
c.n.d.

Kombinacja liniowa wektorów bazowych





Wracamy do szeregu Fouriera



Szeroka klasa sygnałów może być reprezentowana za pomocą kombinacji liniowej funkcji harmoniczných o różnych częstotliwościach – tzw. **szereg Fouriera**



Idea dyskretnej reprezentacji (aproksymacji funkcji)

Rozważmy zagadnienie: daną funkcję g chcemy dobrze przybliżyć ważoną sumą pewnej liczby n prostszych funkcji f_i :

$$g \approx \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

Kombinacja liniowa
funkcji bazowych

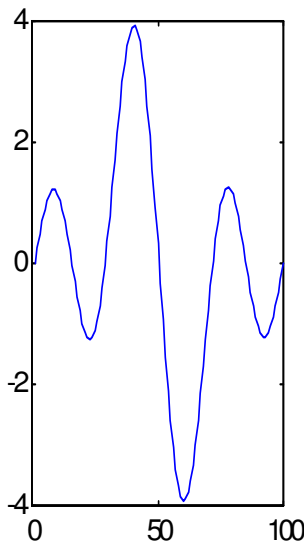
Zwykle zbiór funkcji f_i jest zadany, a naszym celem jest znalezienie takich współczynników α_i , dla których uzyskamy najlepsze przybliżenie funkcji g za pomocą zadanej liczby n prostszych funkcji f_i



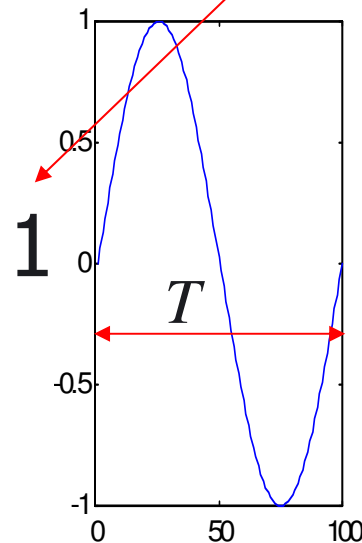
Reprezentacja dowolnej funkcji za pomocą funkcji harmoniczych - szereg Fouriera - przykład

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k \omega_0 t$$

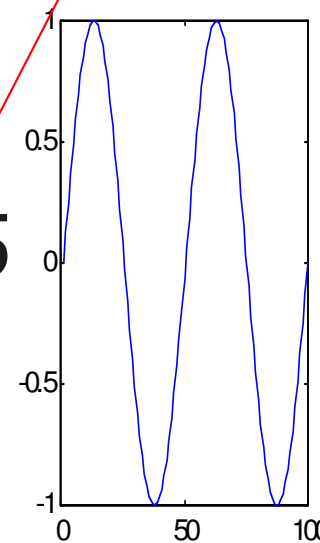
$$x(t) = \sin \omega_0 t - 1.5 \cdot \sin 2\omega_0 t + 2 \cdot \sin 3\omega_0 t$$



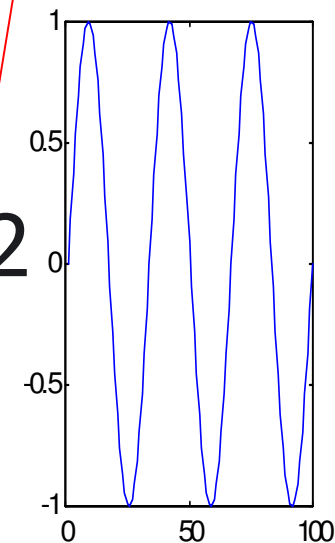
=



-1.5



+2



pulsacja podstawowa

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

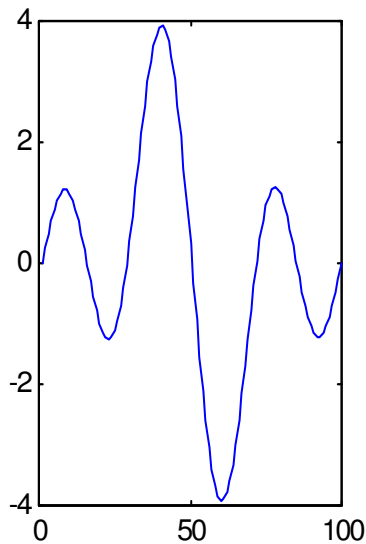
okres podstawowy

Reprezentacja dowolnej funkcji za pomocą funkcji harmoniczych - szereg Fouriera - przykład

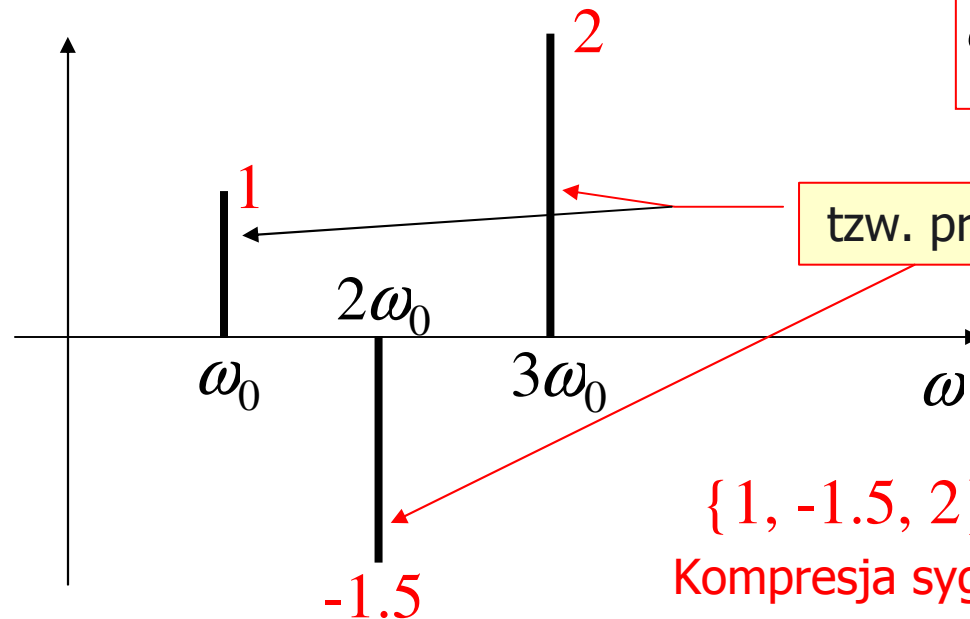
$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

$$x(t) = 1 \sin \omega_0 t - 1.5 \cdot \sin 2\omega_0 t + 2 \cdot \sin 3\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



=



tzw. prążki widma

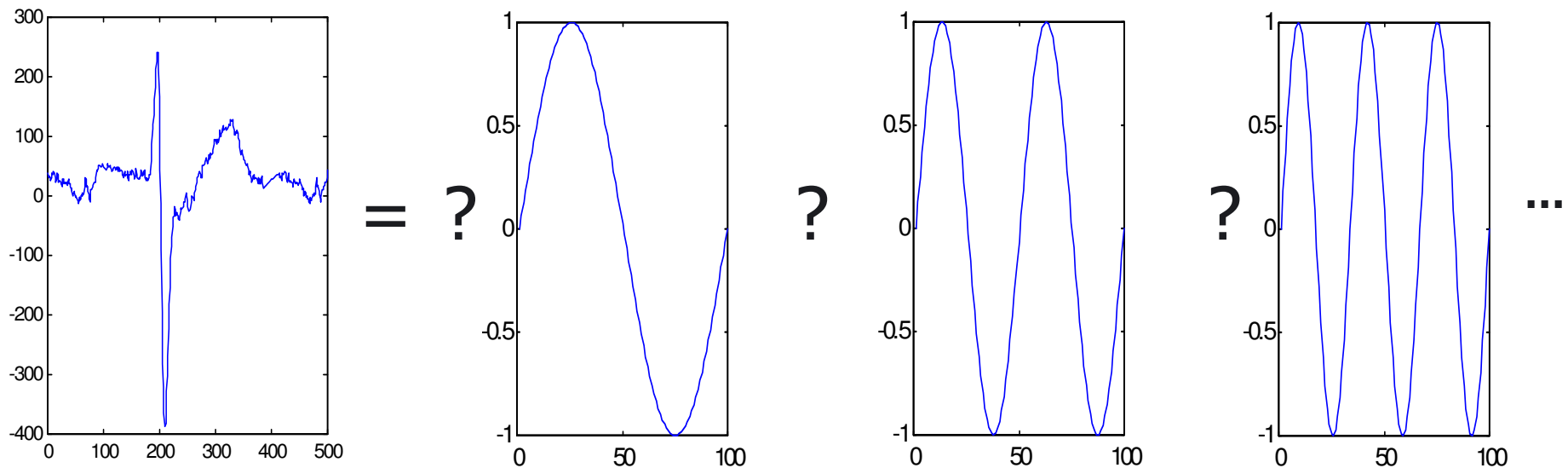
$\{1, -1.5, 2\}$

Kompresja sygnału!



A jak wyznaczyć współczynniki widma dla dowolnej funkcji (sygnału)?

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

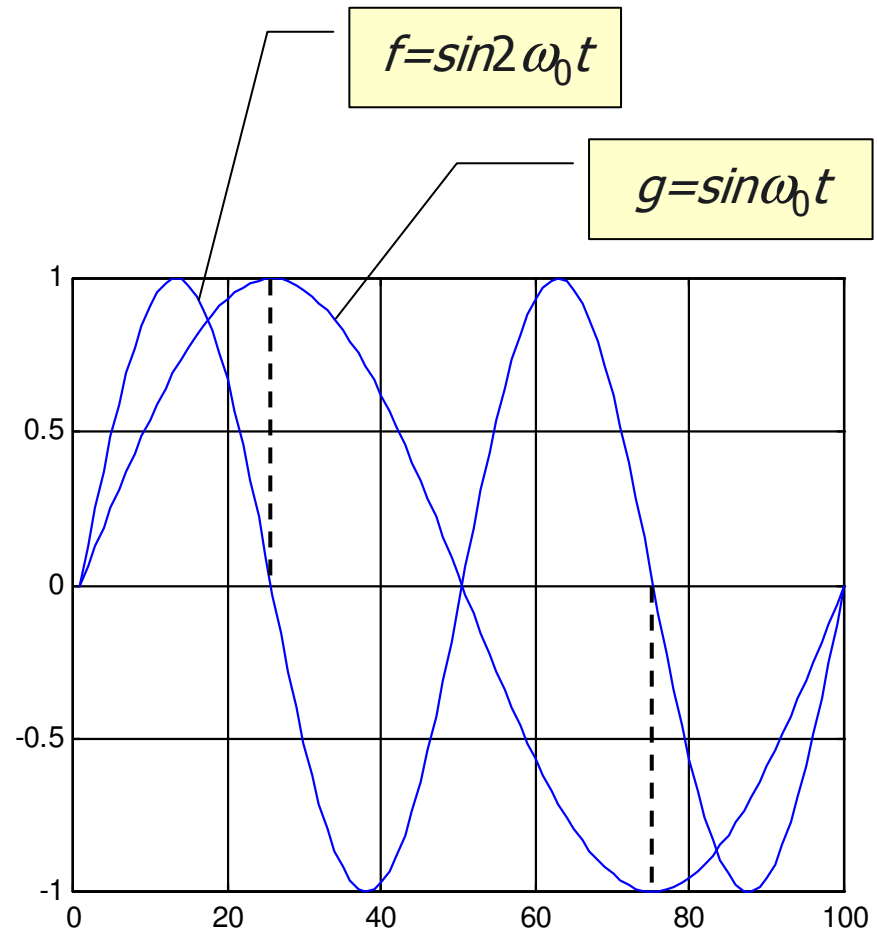


... a iloczyn skalarny funkcji?

$$\langle f, g \rangle = \int_{t=0}^T f(t) \cdot g(t) dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{t=0}^T \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt = 0 \quad k \neq 1$$

Zatem funkcje harmoniczne możemy nazwać (podobnie jak wektory bazowe) funkcjami **bazowymi ortogonalnymi**





Szereg Fouriera jest budowany ze zbioru funkcji harmonicznych ortogonalnych – też współczynniki łatwo policzyć

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

gdzie: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ tzw. pulsacja podstawowa

oraz:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

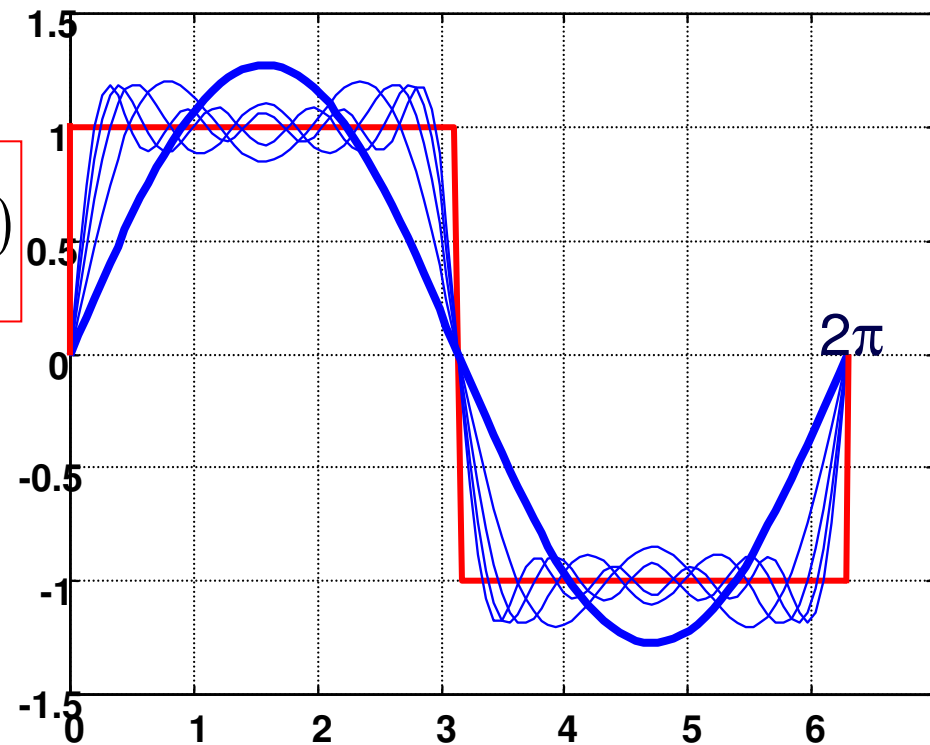
Sposób wyliczenia współczynników zaproponowany przez Fouriera (iloczyny skalarne funkcji bazowych i funkcji rozwijanej w szereg)



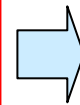
Szereg Fouriera - przykład

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$



$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right)$$

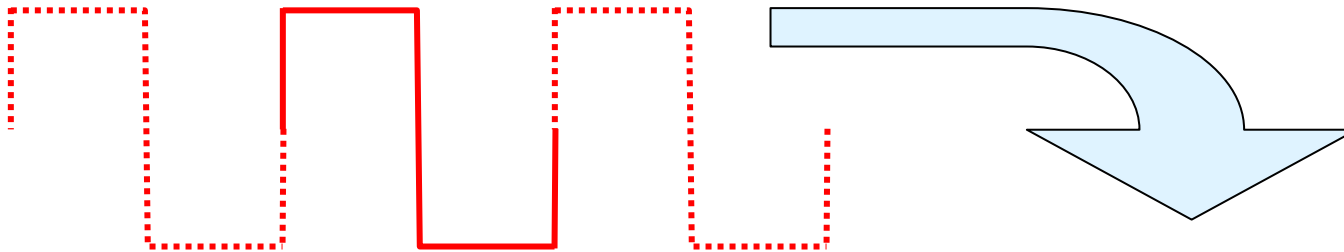


$$a_k = 0, k = 0, 1, \dots$$

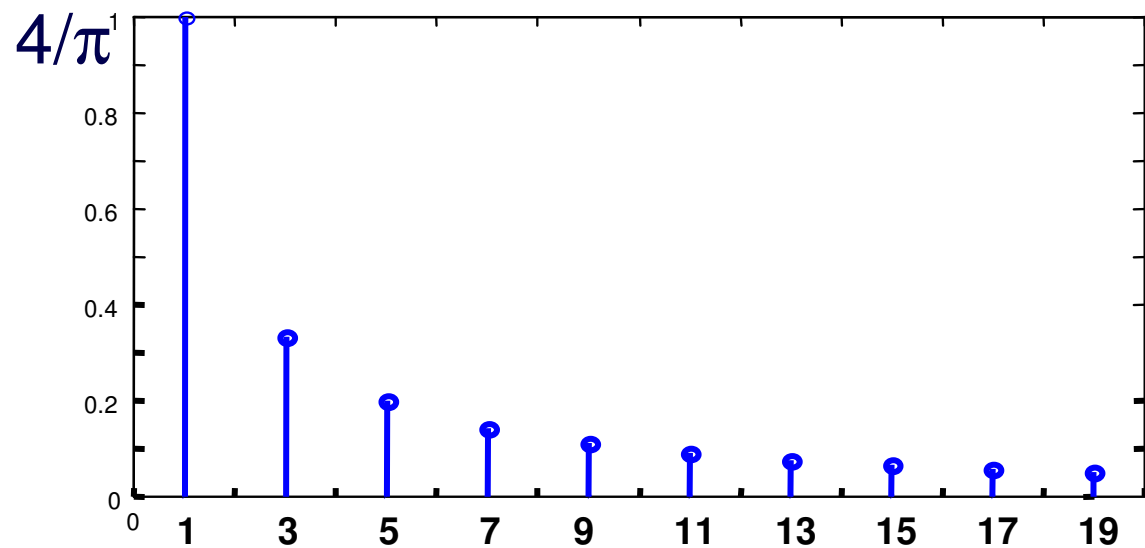
$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}, \dots$$



Szereg Fouriera - przykład

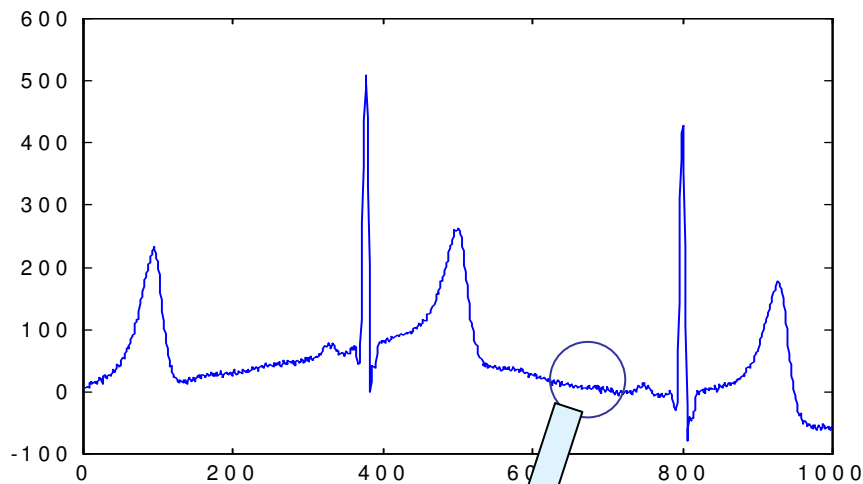


Widmo Fouriera (współczynniki b)

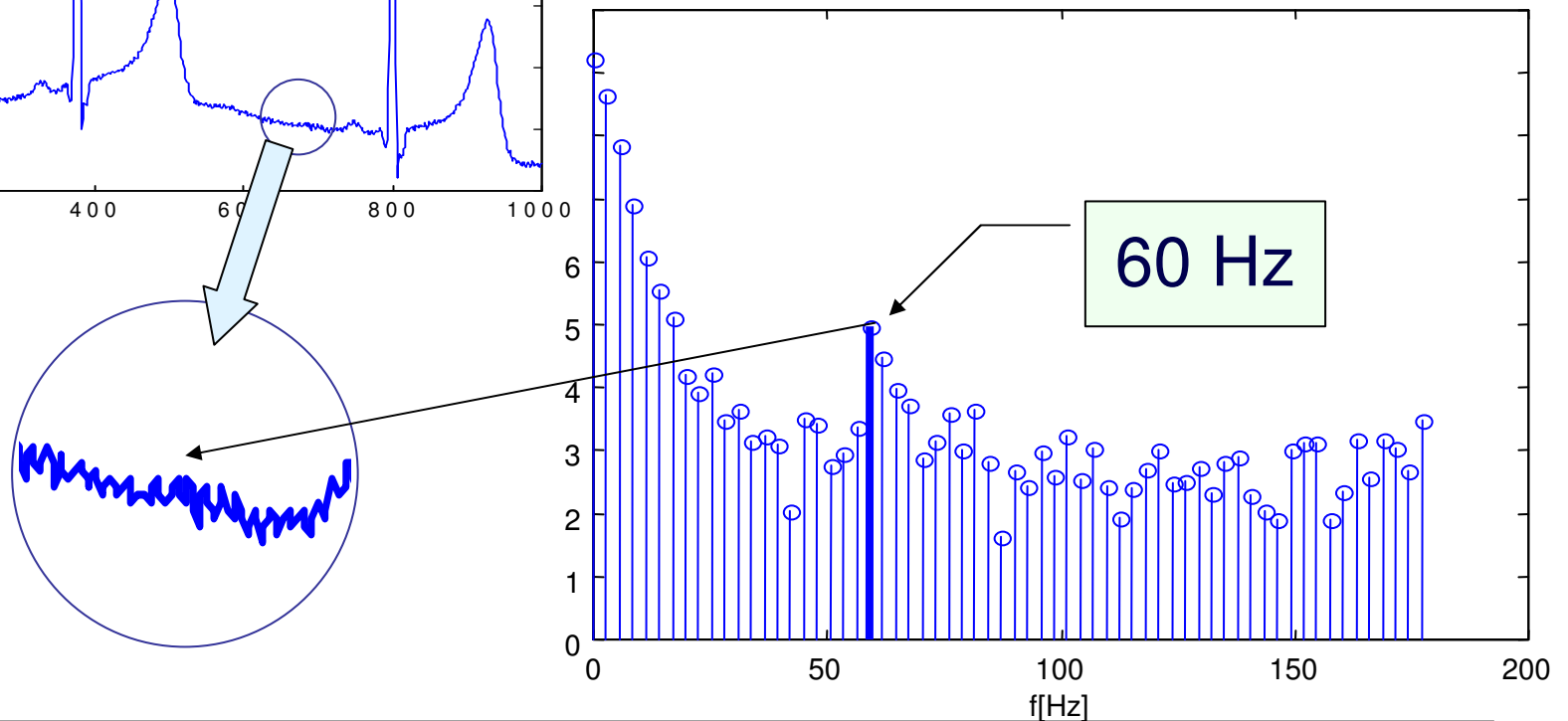




Widmo Fouriera zapisu EKG

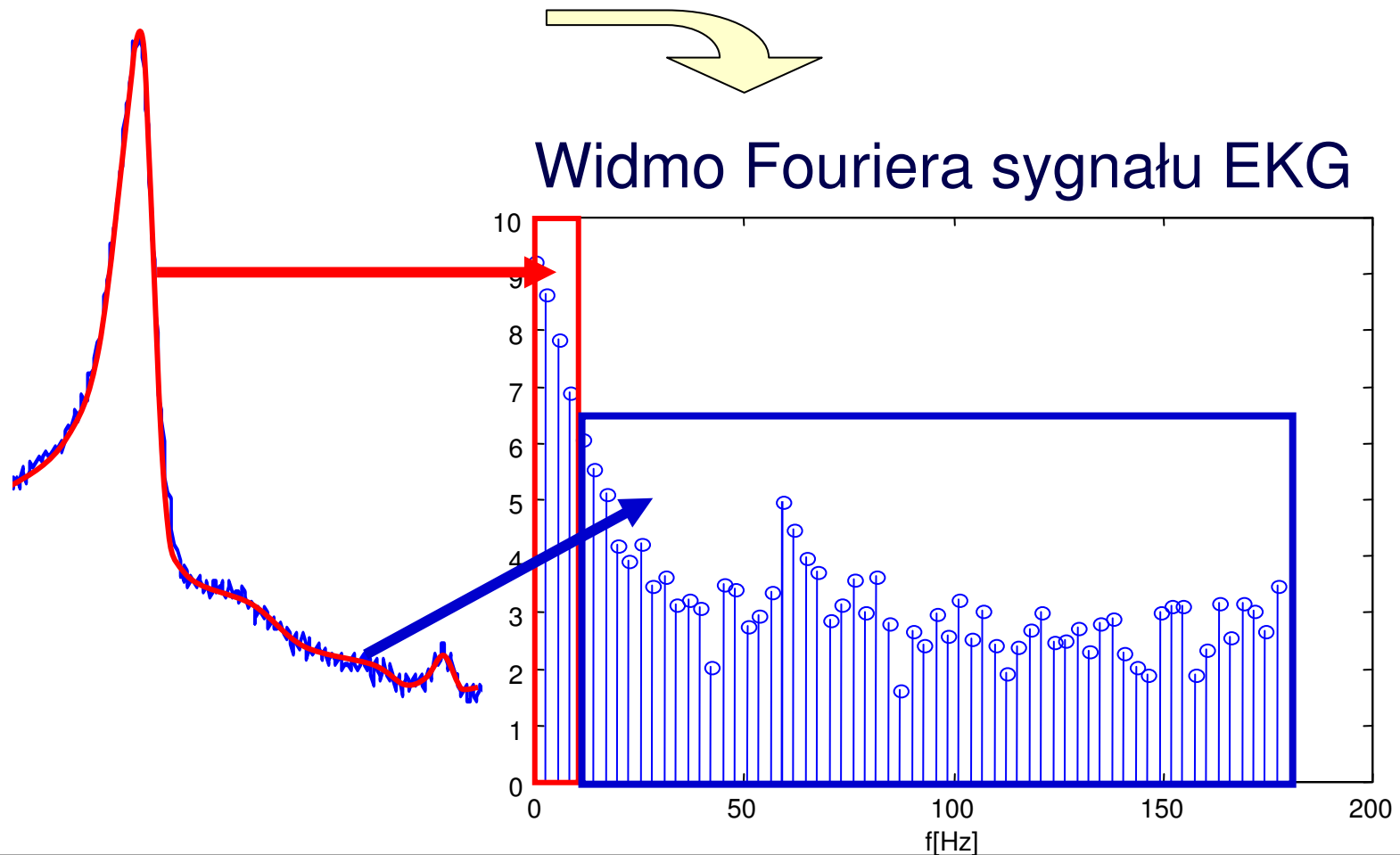


Widmo Fouriera sygnału EKG





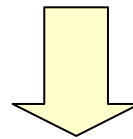
Widmo Fouriera zapisu EKG





Wykładnicza postać szeregu Fouriera

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$



$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

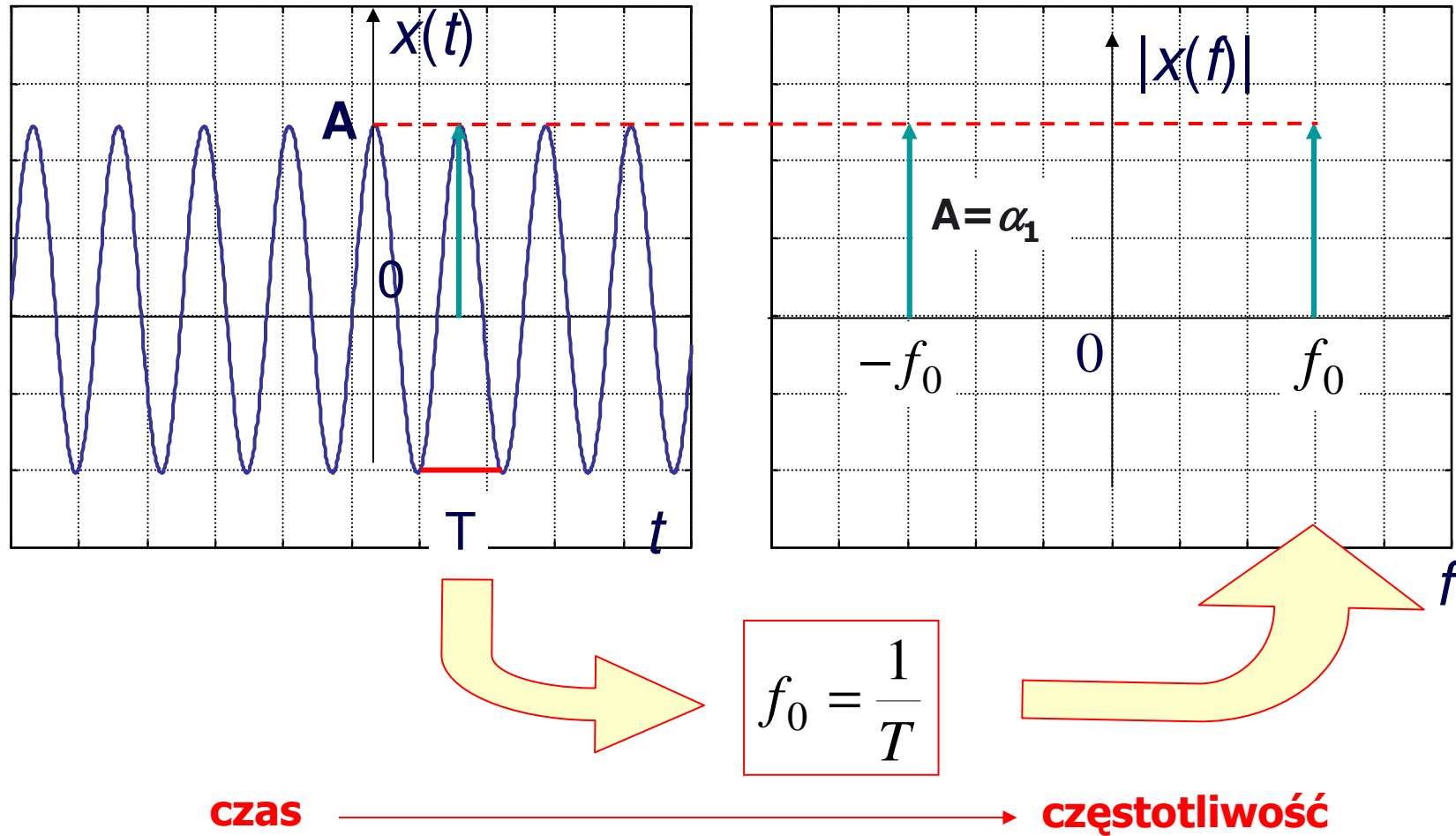
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Współczynniki Fouriera
(liczby zespolone)

Gdzie: $c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$, $c_0 = 0$

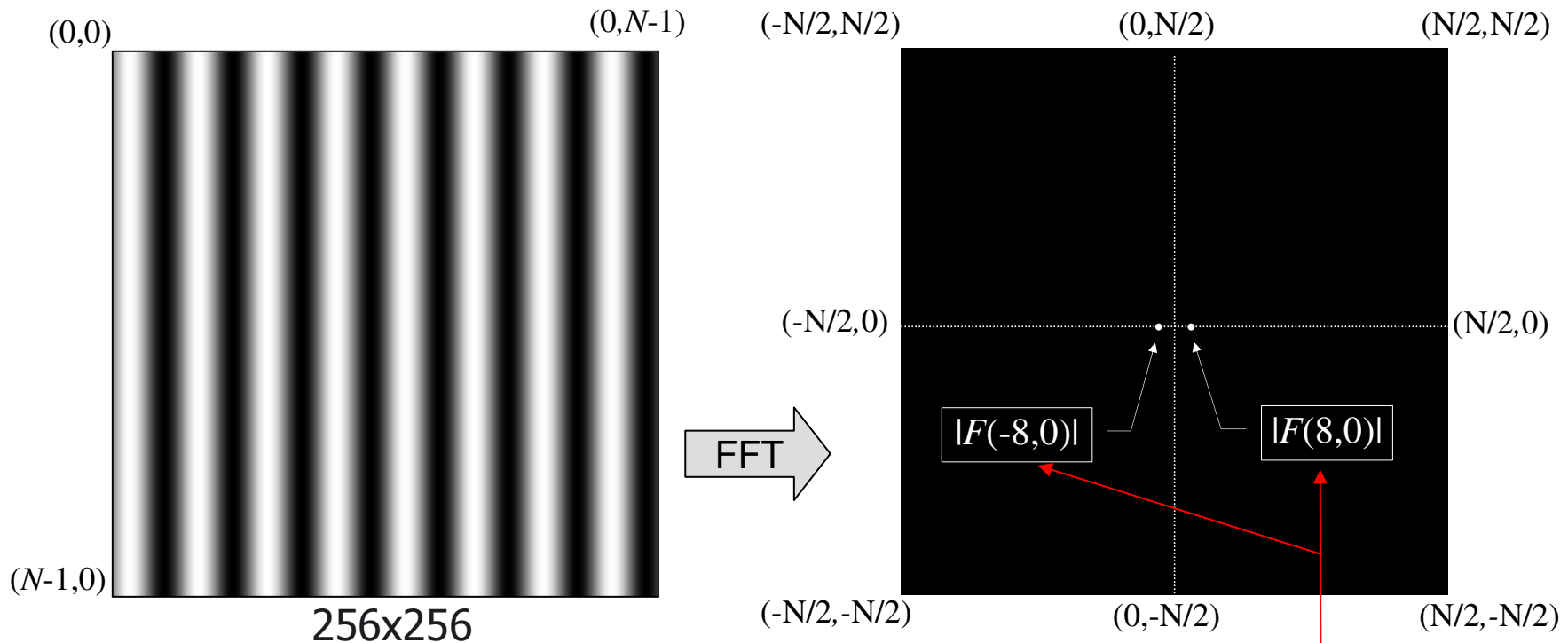


Widmo Fouriera kosinusoidy





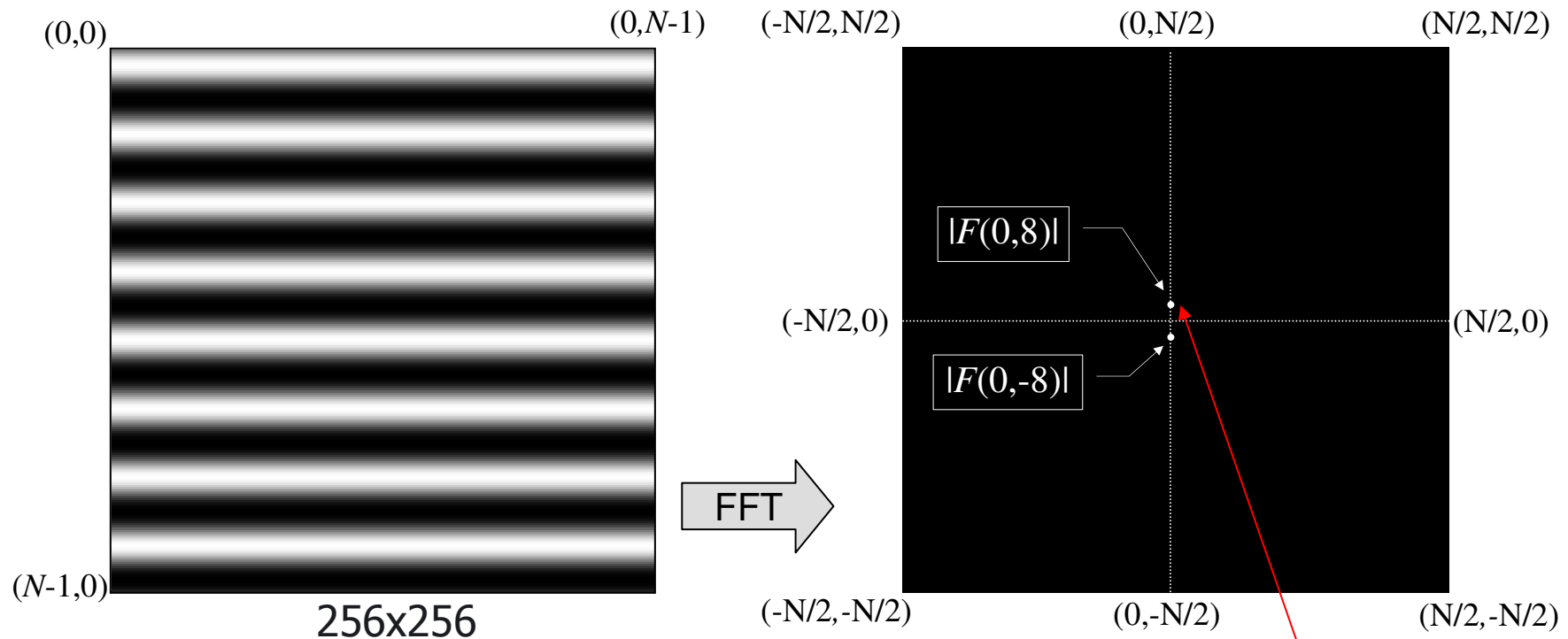
Przenosimy się do dwóch wymiarów



$$\begin{aligned} T_{\min_period} &= 2\Delta x && \text{jest max możliwą częstotliwością:} && 128\Delta u \\ T_{\sin_period} &= 32\Delta x && \text{jest 16x mniejszą częstotliwością tj.:} && \frac{128\Delta u}{16} = 8\Delta u \end{aligned}$$



Przenosimy się do dwóch wymiarów



$$T_{min_period} = 2\Delta x \quad \text{jest max możliwą częstotliwością:} \quad 128\Delta u$$

$$T_{sin_period} = 32\Delta x \quad \text{jest 16x mniejszą częstotliwością tj.:} \quad \frac{128\Delta u}{16} = 8\Delta u$$



Uwaga! ... Formalny zapis przekształcenia dwuwymiarowego Fouriera w postaci wykładniczej

$$F(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \frac{ux}{N}} e^{-2\pi j \frac{vy}{N}} = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \frac{(ux+vy)}{N}}$$

dla $u, v = 0, 1, \dots, N-1$

Proste - FFT

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi j \frac{ux}{N}} e^{2\pi j \frac{vy}{N}} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi j \frac{(ux+vy)}{N}}$$

dla $x, y = 0, 1, \dots, N-1$

Odwrotne - IFFT

$$e^{jk\omega_0 t} = e^{\frac{jk2\pi}{T}} = e^{\frac{2\pi jkt}{T}} = e^{\frac{2\pi jk(\Delta t n)}{N\Delta t}} = e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \quad \dots \text{uff!}$$





Interesuje nas widmo amplitudowe obrazu

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j \arg[F(u, v)]}$$

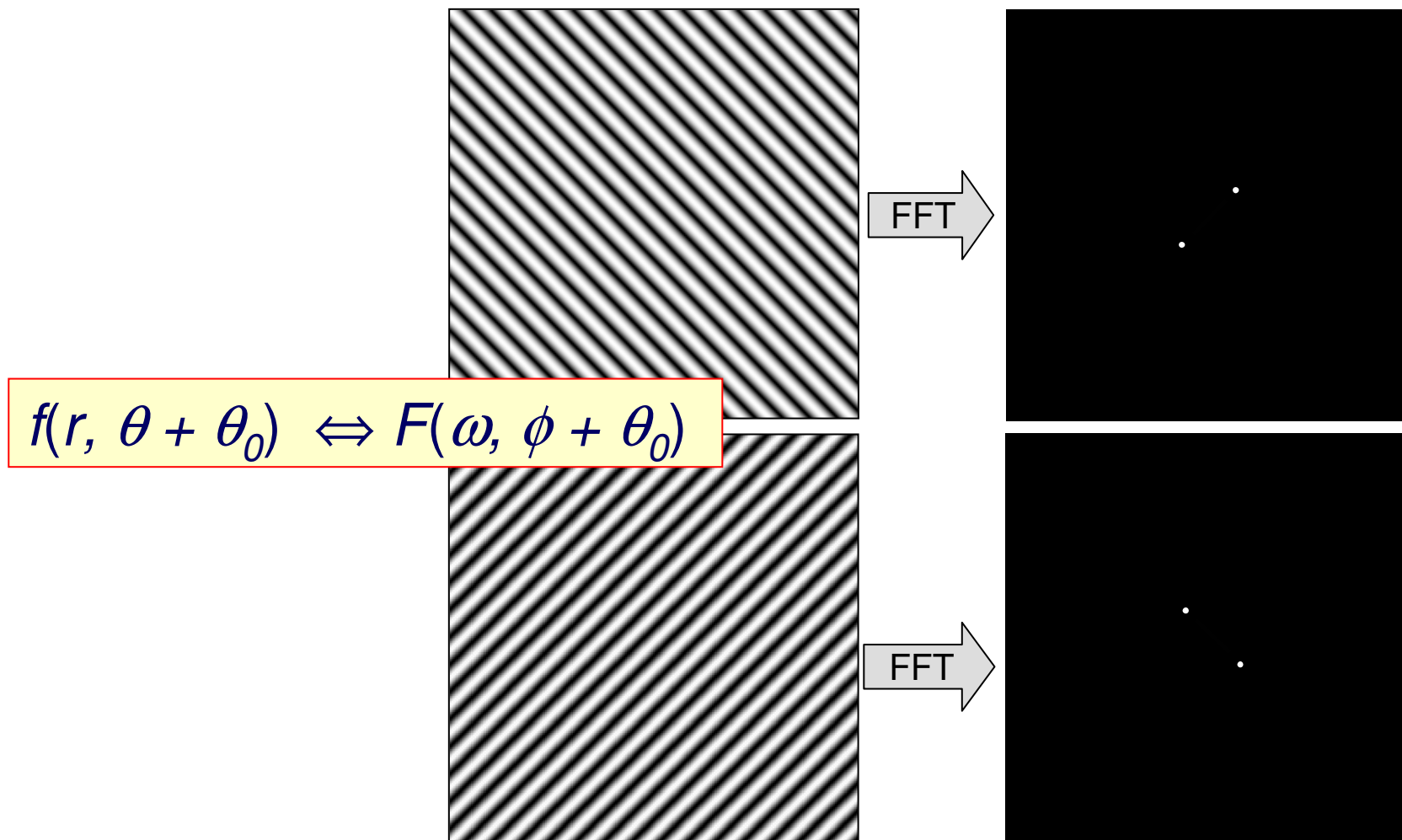
$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}[F(u, v)]^2 + \operatorname{Im}[F(u, v)]^2}$$

$$\arg[F(u, v)] = \arctan \frac{\operatorname{Im}[F(u, v)]}{\operatorname{Re}[F(u, v)]}$$

Wszystkie wyświetlane obrazy widm są widmami amplitudowymi



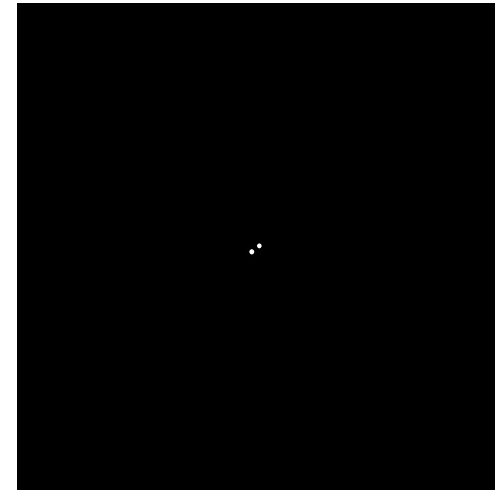
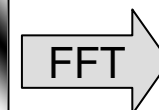
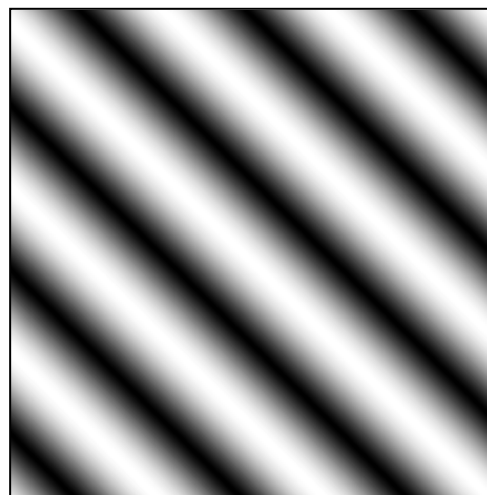
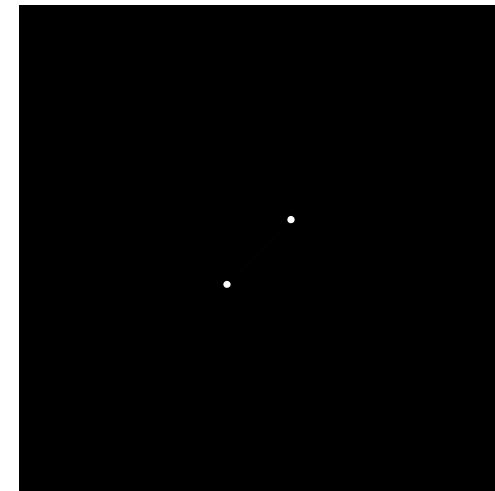
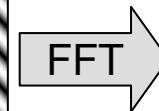
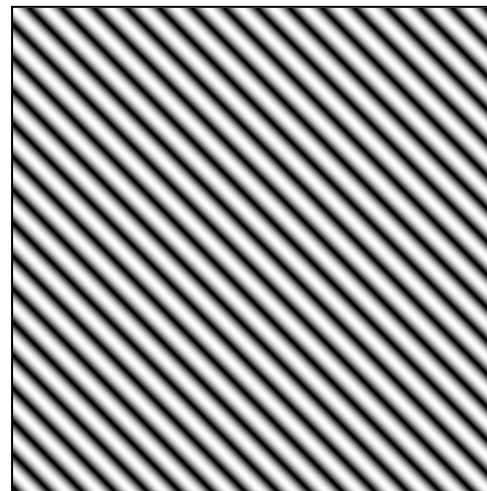
Obrót obrazu powoduje obrót o ten sam kąt jego widma



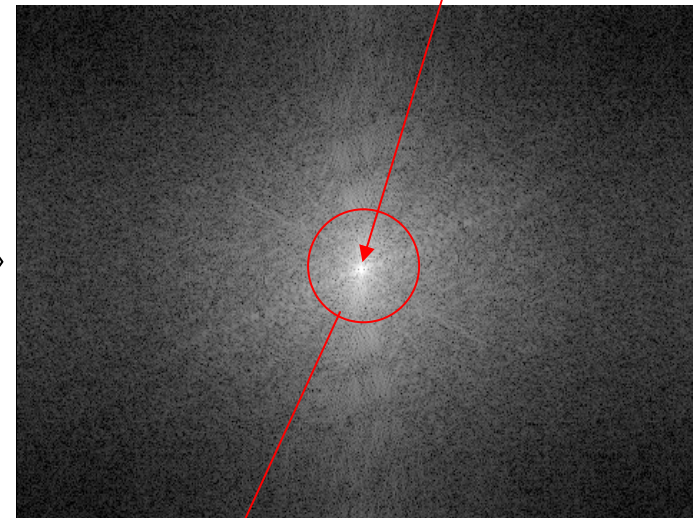
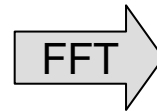


Własność zmiany skali

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = |ab|^{-1} F(u/a, v/b)$$



Obraz i jego widmo amplitudowe

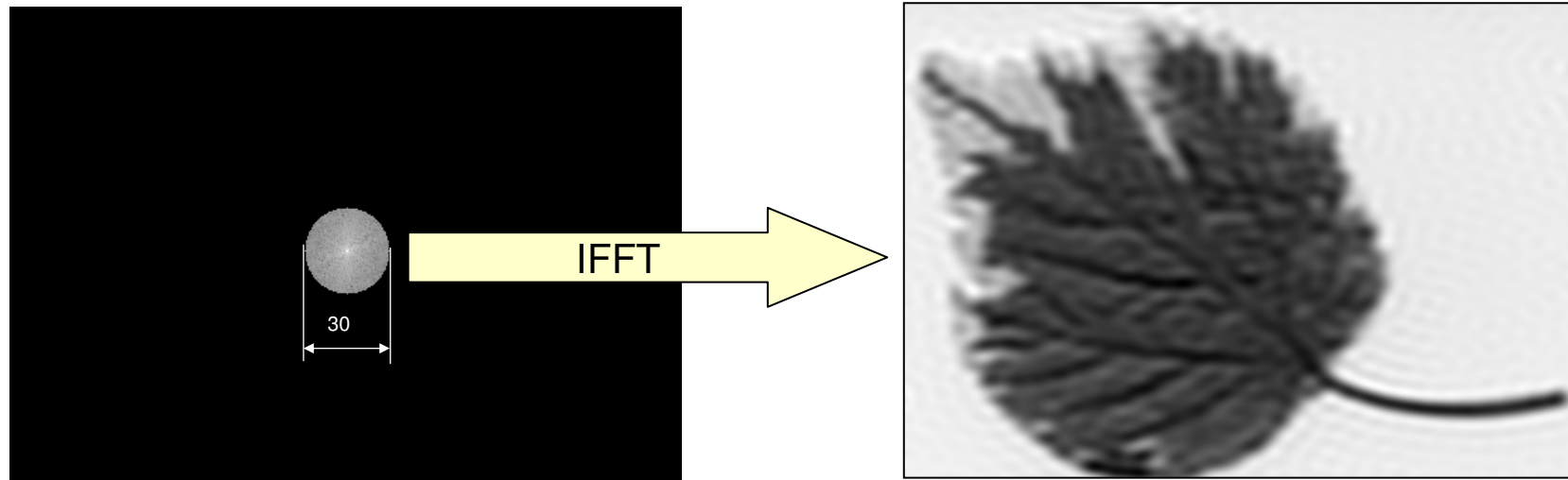


$F(0,0)$

tu skupia się ok. 90%
energii obrazu

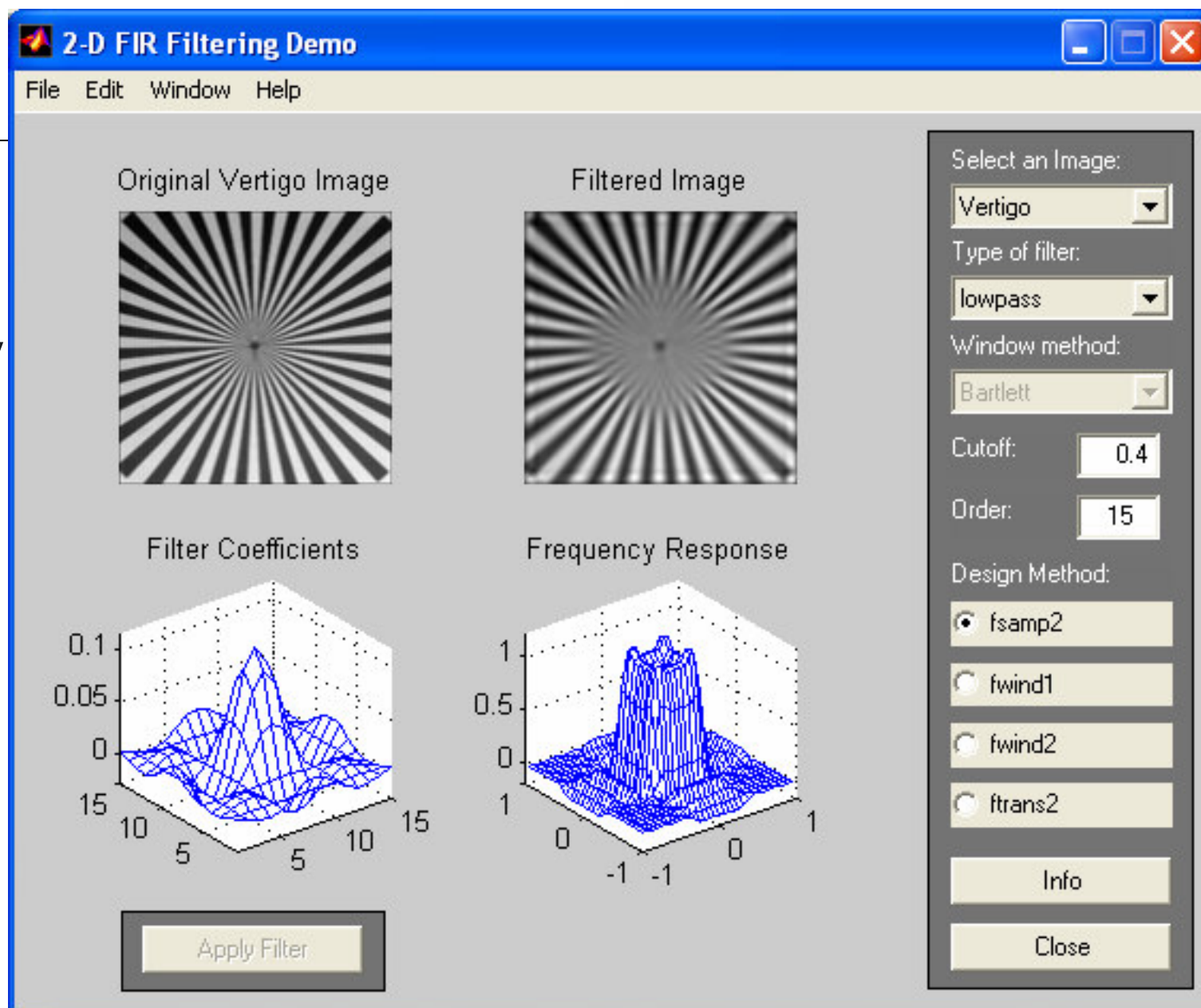
$$\log(1+|F(u,v)|)$$

Filtr dolnoprzepustowy

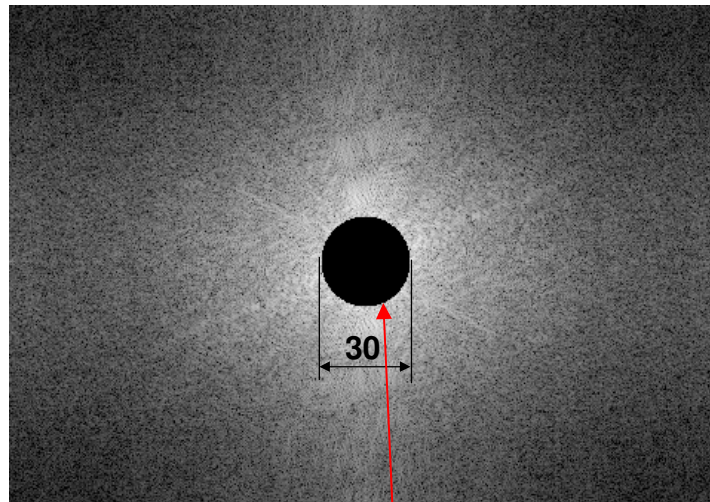


Wybieramy harmoniczne widma o małej (z dolnej) częstotliwości - obserwujemy „rozmycie” obrazu

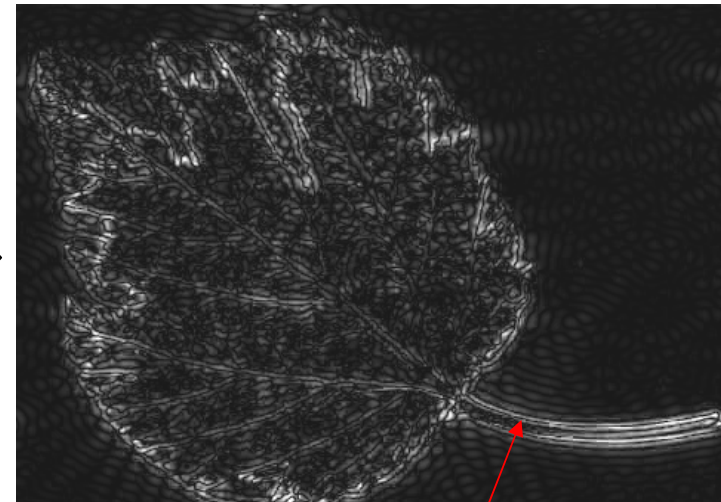
Filtr dolno-przepustowy



Filtr górnoprzepustowy zdefiniowany w dziedzinie widma



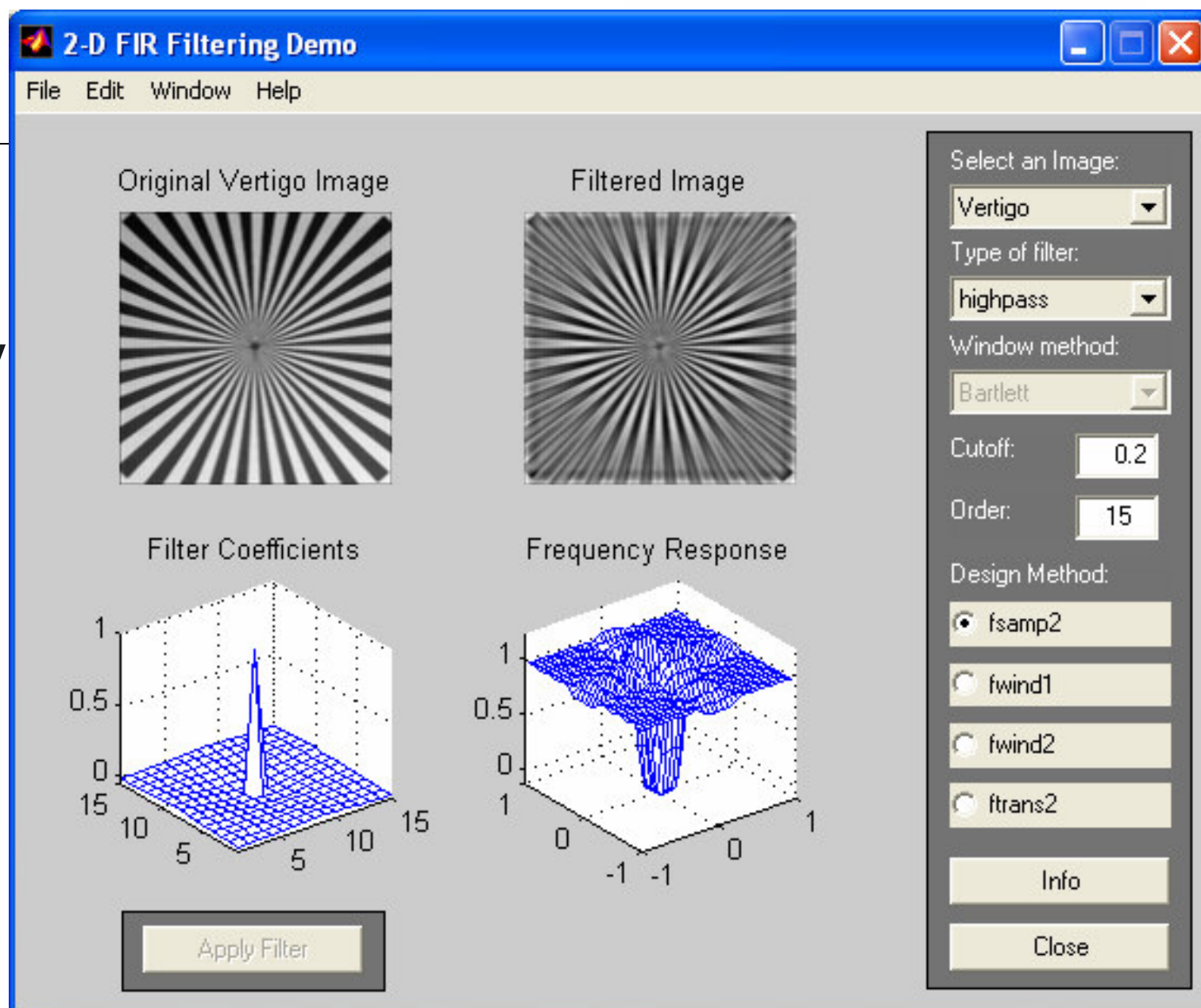
IFFT



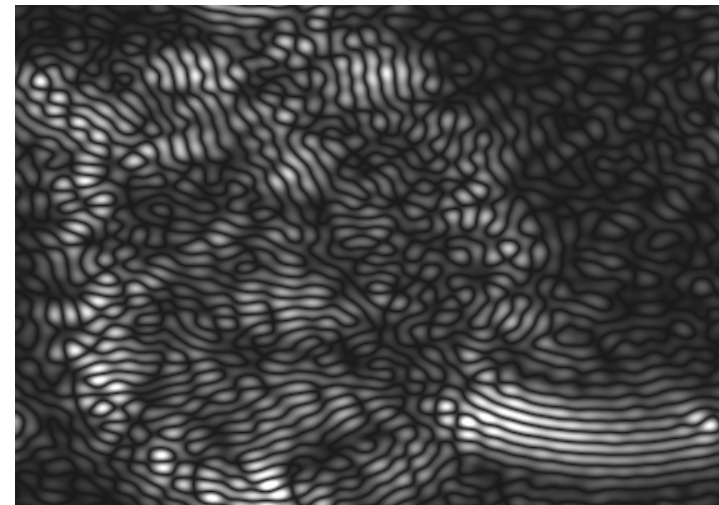
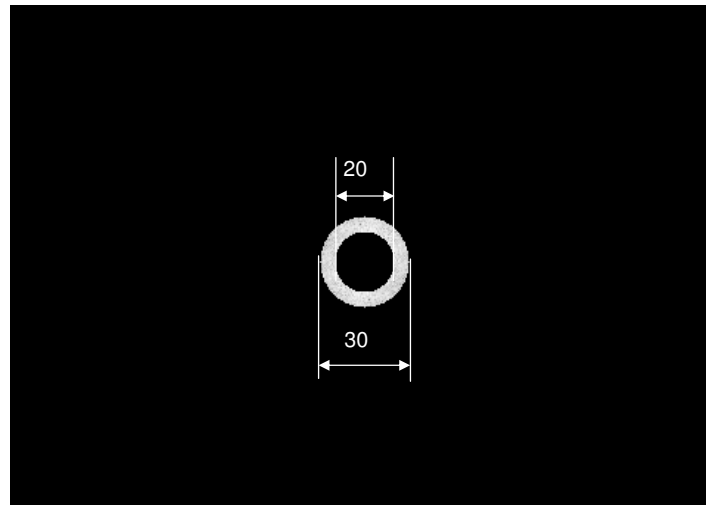
Informacja o
krawędziach obrazu

Usuwamy małe
częstotliwości z obrazu

Filtr górnoprzepustowy



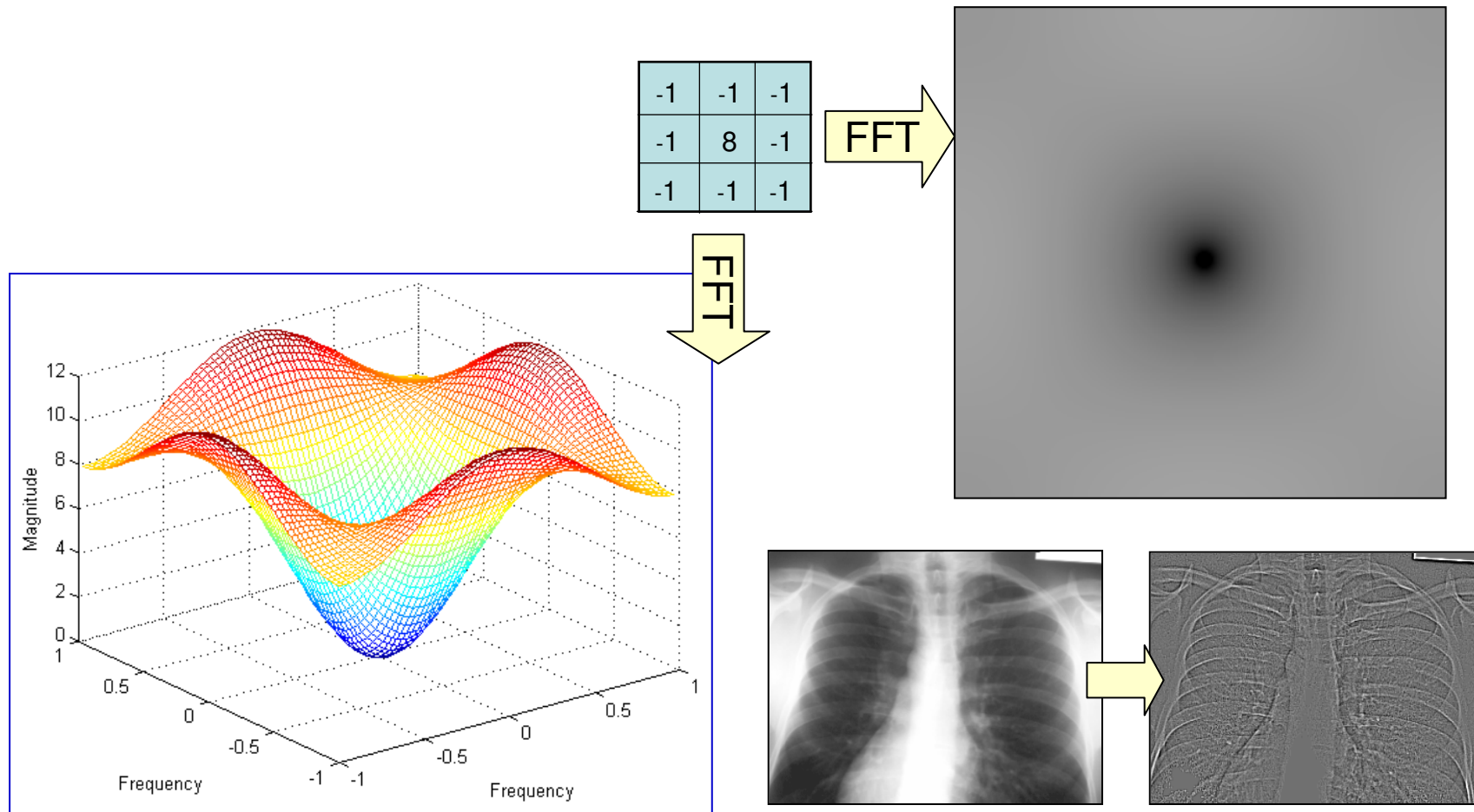
Filtr pasmowoprzepustowy zdefiniowany w dziedzinie widma



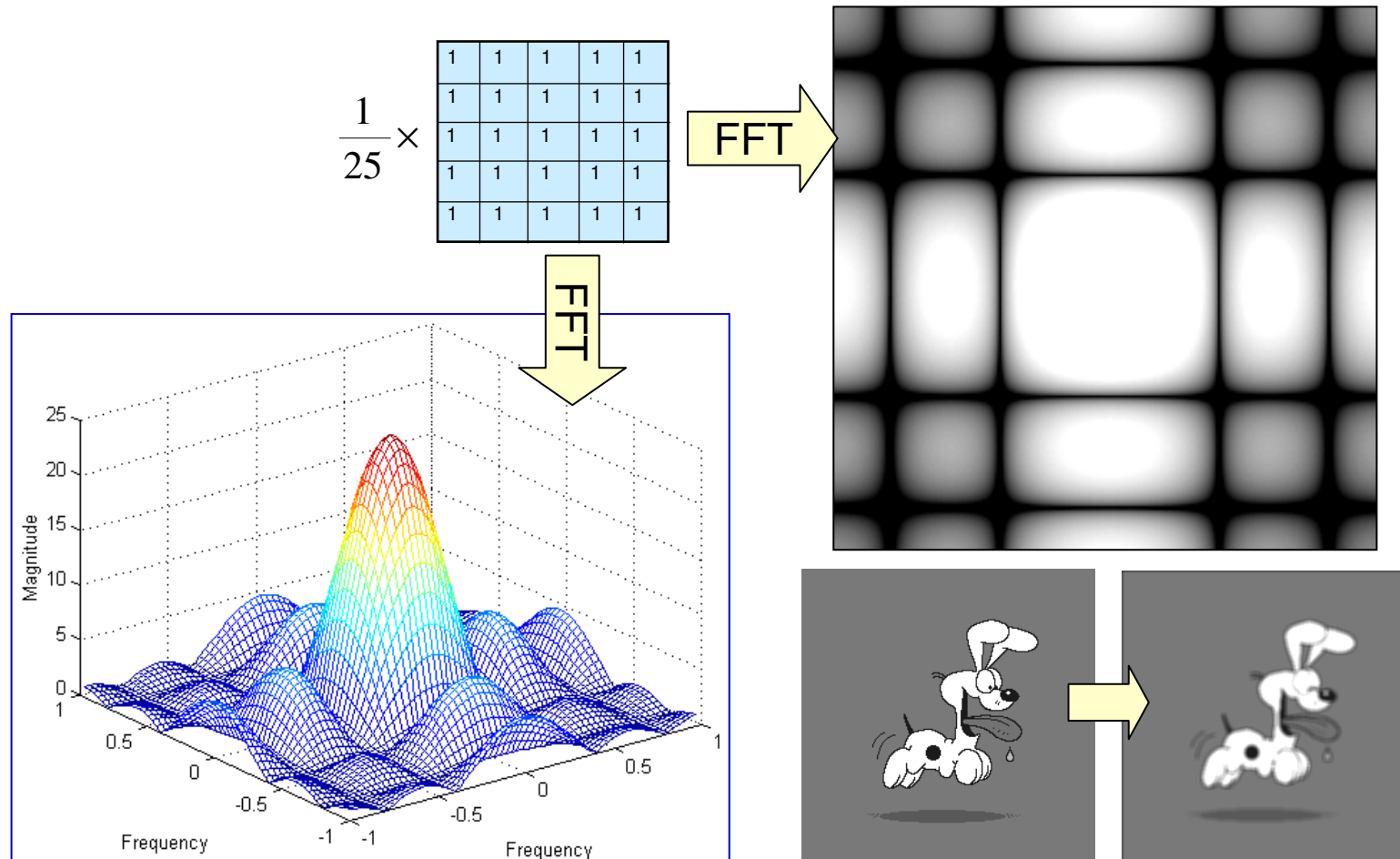
Filtr „wybiera” wąski zakres harmonicznych z widma obrazu (analogia do działania kamertonu, który również dźwięczy wg własnej częstotliwości)



Maska filtra Laplace'a i jego charakterystyka widmowa



Maska filtra uśredniającego i jego charakterystyka widmowa





Splot obrazów a iloczyn ich widm

$$\text{FFT}\{f(x,y) g(x,y)\} = F(u,v) * G(u,v)$$

$$\text{FFT}\{f(x,y) * g(x,y)\} = F(u,v) G(u,v)$$

Filtracje obrazu można realizować w dziedzinie widma mnożąc widmo obrazu przez charakterystykę filtru i wyznaczając odwrotne przekształcenie Fouriera wyniku filtracji

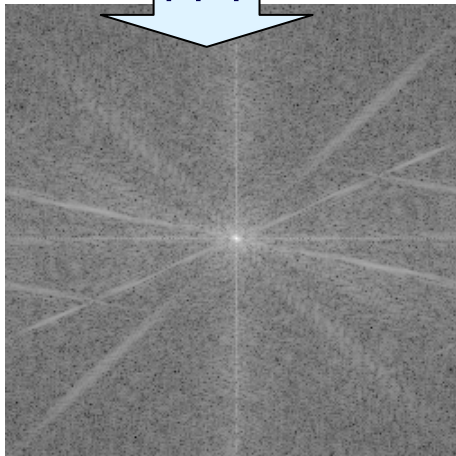




Filtracja obrazu w dziedzinie widma



FFT



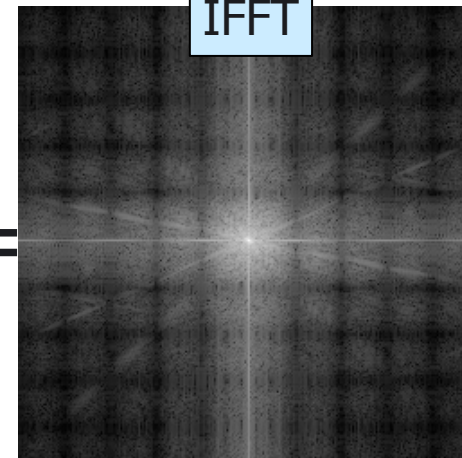
Maska Filtru

$$\frac{1}{100} \times$$

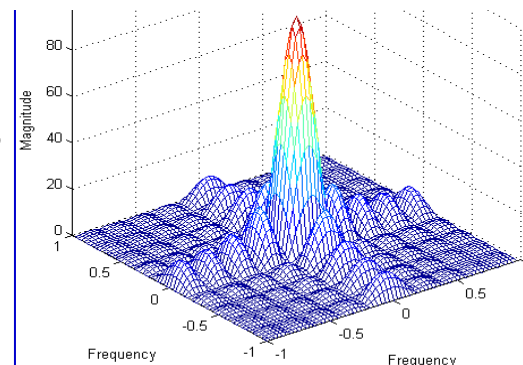
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



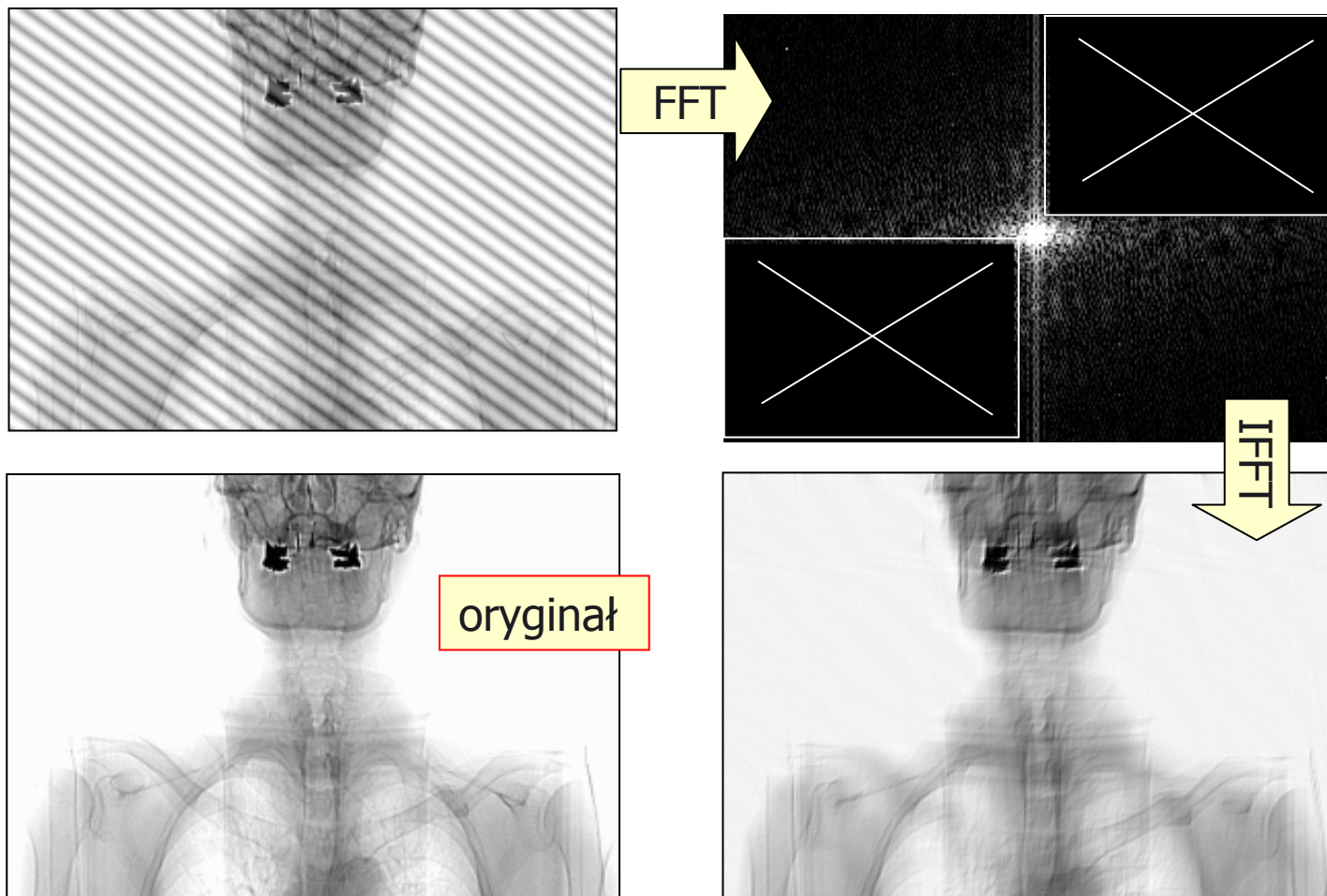
IFFT



Charakterystyka filtru
dolnoprzepustowego

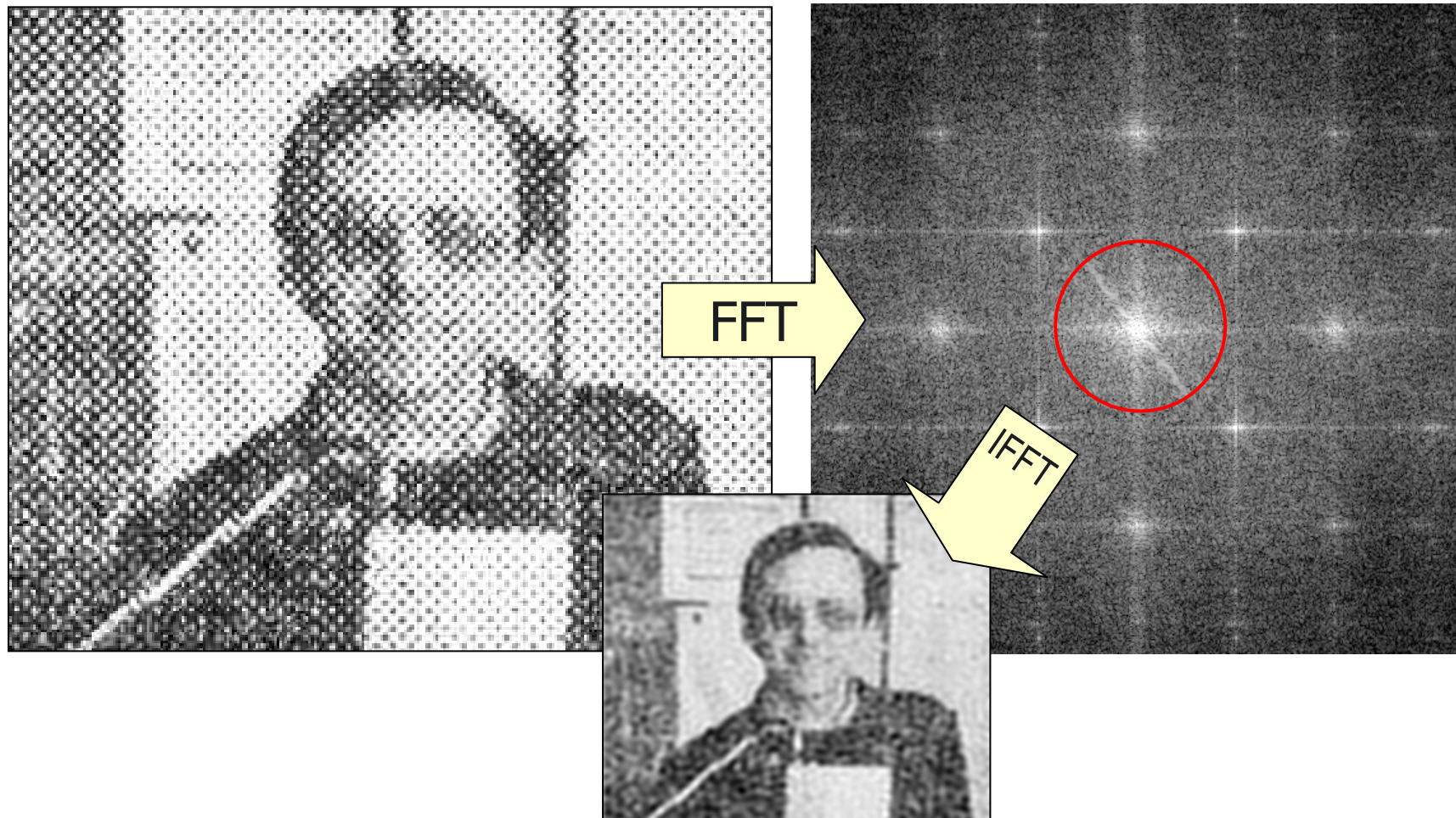


Usuwanie zakłóceń harmonicznych w dziedzinie widma





Redukcja zakłóceń obrazu





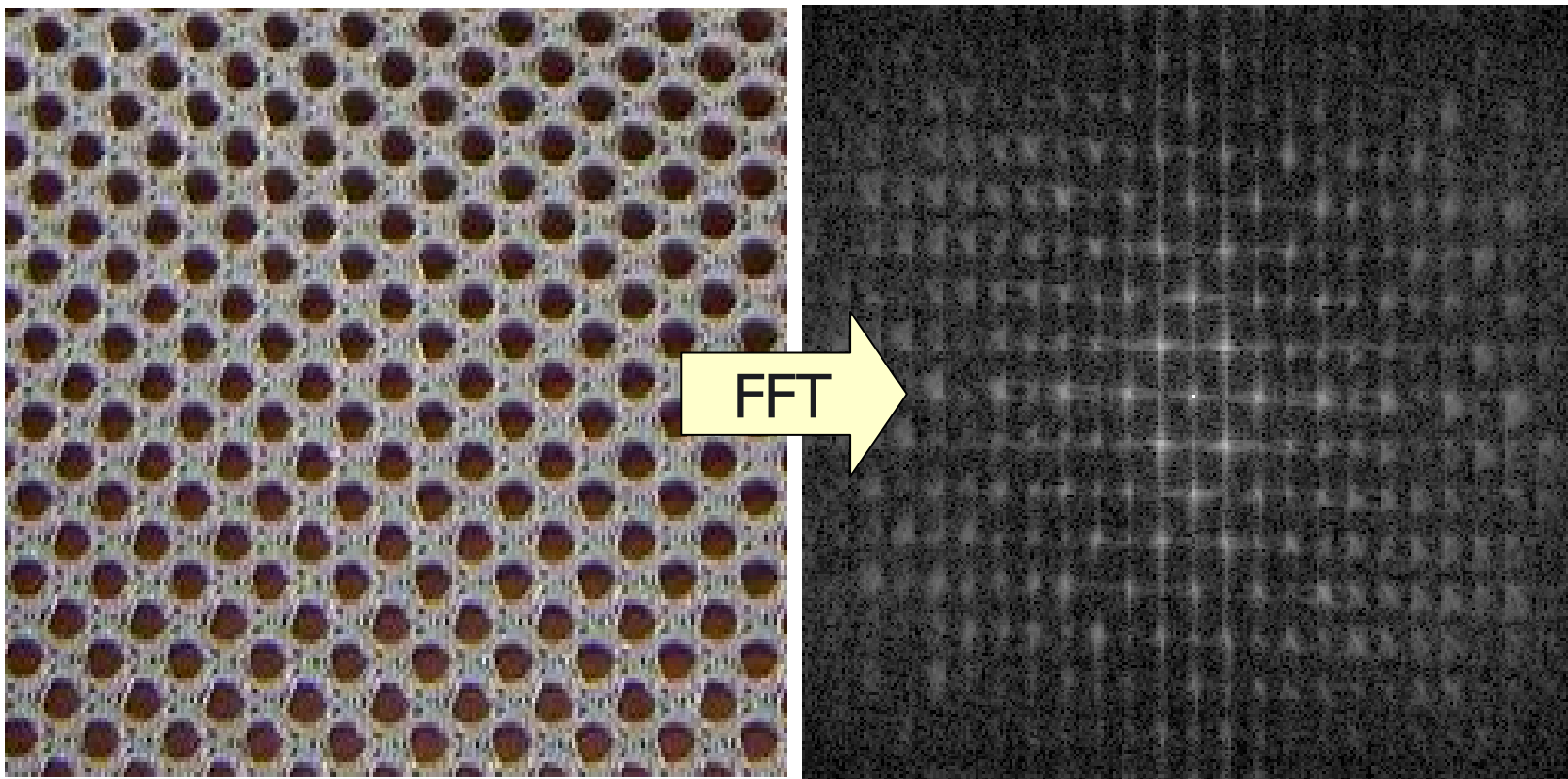
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład widma obrazu

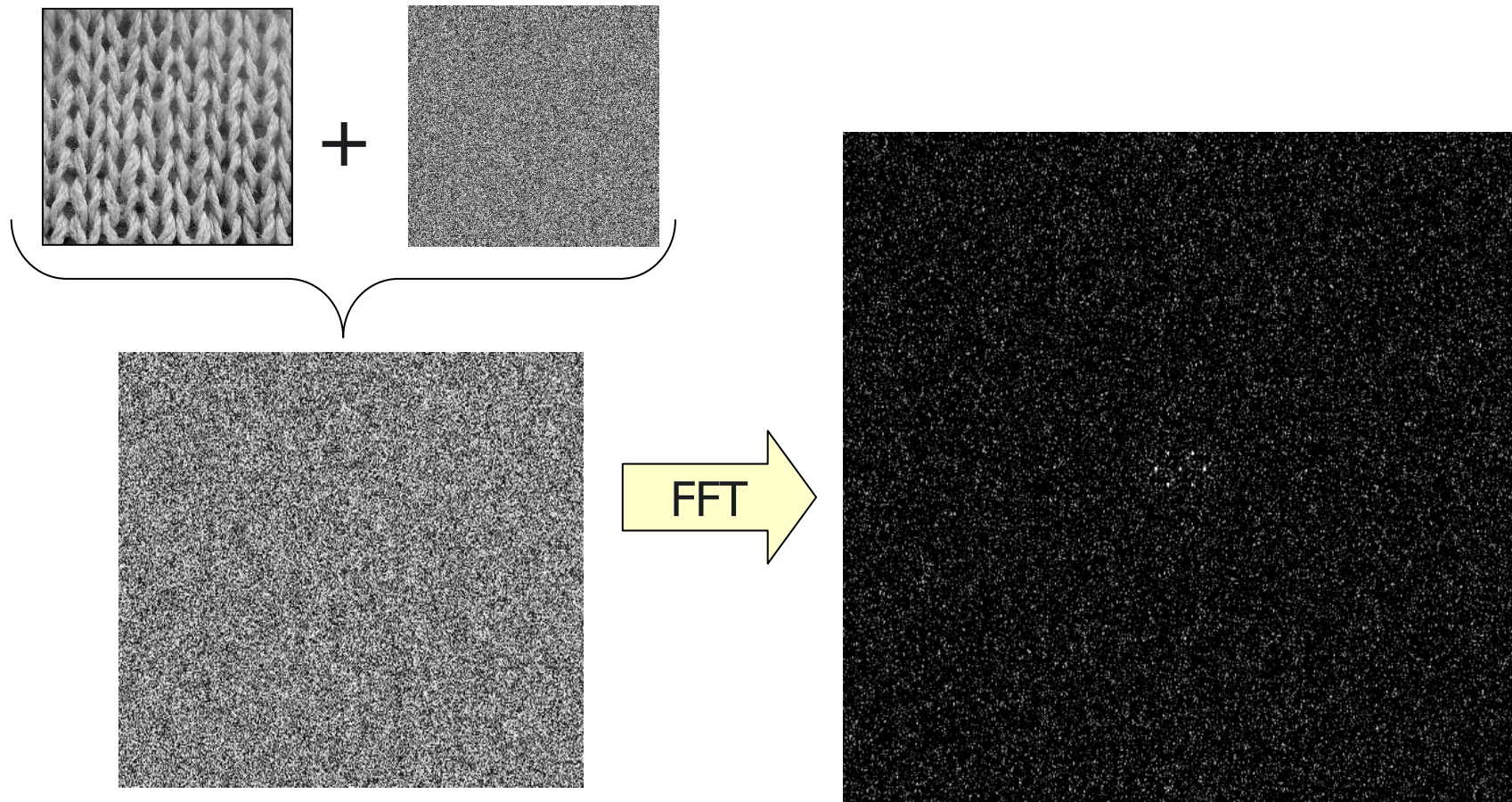


Politechnika Łódzka
Instytut Elektroniki

P. Strumiłło, Wstęp do komputerowej analizy obrazów (5)



Wykrywanie regularnych kształtów w obrazach zakłóconych





Koszt obliczeniowy przekształcenia Fouriera

$$F(u, v) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \frac{ux+vy}{N}}$$

dla $u, v = 0, 1, \dots, N-1$

jeden próbek

$$\text{np. } F(0,0) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

N	N ² (FT)	NlogN (FFT)	Zysk N/logN
16	256	64	4
256	65535	2048	32
512	262144	4608	64
2048	~4e6	22528	186

W tzw. szybkim przekształceniu Fouriera (ang. **Fast Fourier Transform – FFT**) wykorzystuje się symetrie i okresowość funkcji wykładniczej





Podsumowanie

- Model sygnału budowany z bazowych funkcji harmoniczných - analogia do wektorów bazowych
- Definicja szeregu trygonometrycznego i wykładniczego Fouriera
- Przykłady widma sygnałów jednowymiarowych
- Dwuwymiarowe przekształcenie Fouriera
- Przykłady widm obrazów i właściwości
- Interpretacja częstotliwościowa filtrów przestrzennych obrazu
- FFT (ang. Fast Fourier Transform)

Terminologia: Wynikiem transformacji Fouriera jest transformata Fouriera

