

Sztuczna inteligencja/ Logika rozmyta

Krzysztof Ślot

Zadanie nr 13 – Studia podyplomowe „Przetwarzanie Sygnałów i
Obrazów Biomedycznych”



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Prezentacja multimedialna
współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
w projekcie

*„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń
– zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej –
zarządzanie Uczelnią,
nowoczesna oferta edukacyjna
i wzmacniania zdolności do zatrudniania
osób niepełnosprawnych”*



Politechnika Łódzka
Instytut Elektroniki

90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116,
tel. 042 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl



Logika rozmyta – wprowadzenie

- Geneza: konstatacja niekompatybilności precyzyjnego języka zwykłej logiki i nieprecyzyjnej natury rzeczywistych problemów
- Przykłady: diagnostyka medyczna
 - Informacje gromadzone podczas wywiadu z pacjentem mają charakter jakościowy, a nie ilościowy: przybliżony język opisu, niejednoznaczność symptomów, subiektywność doświadczania
 - Informacja, zawarta w obiektywnie pozyskanych danych (np. obrazach USG czy NMR) czasami bywa niemożliwa do precyzyjnego wyrażenia i, w konsekwencji, niemożliwa do wykorzystania jako argument ścisłych procedur analizy
 - Opis stanów za pomocą pojęć przybliżonych może pozwolić na skuteczniejsze diagnozowanie i podejmowanie decyzji niż ich opis precyzyjny.

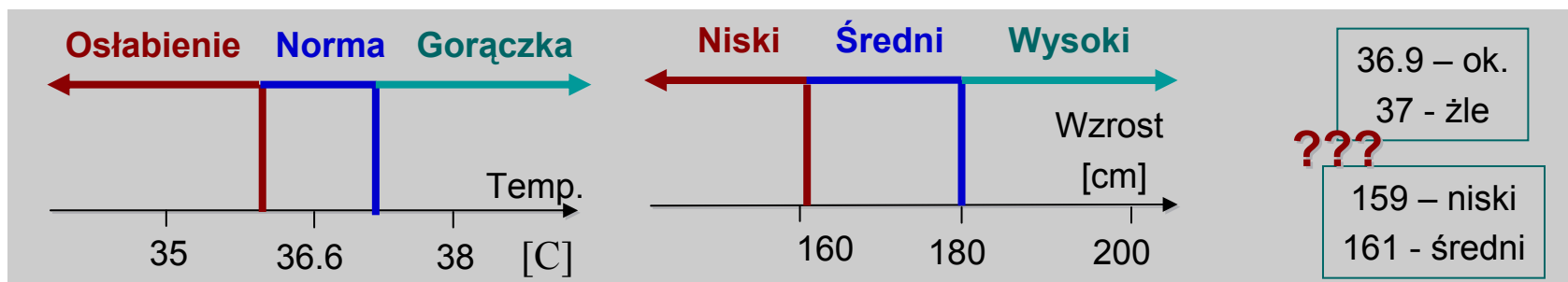
Inne dziedziny

- Sterowanie
- Prognozowanie trendów
- ...

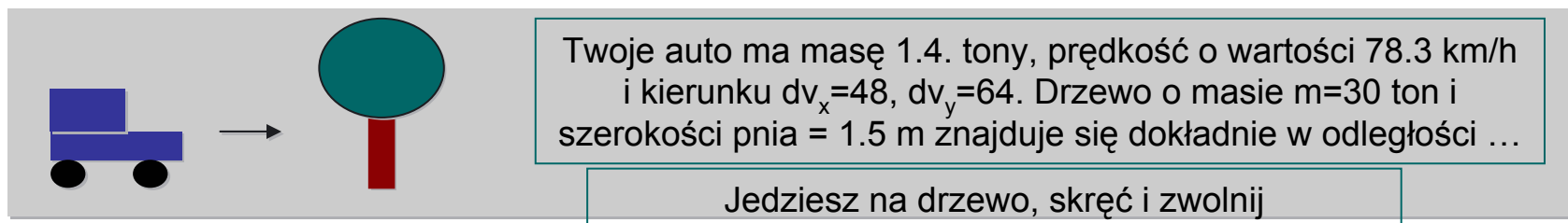


Logika rozmyta – wprowadzenie

- Problemy wynikające z niekompatybilności
 - sztuczność podziałów między kategoriami danych reprezentowanymi przez klasycznie definiowane zbiory

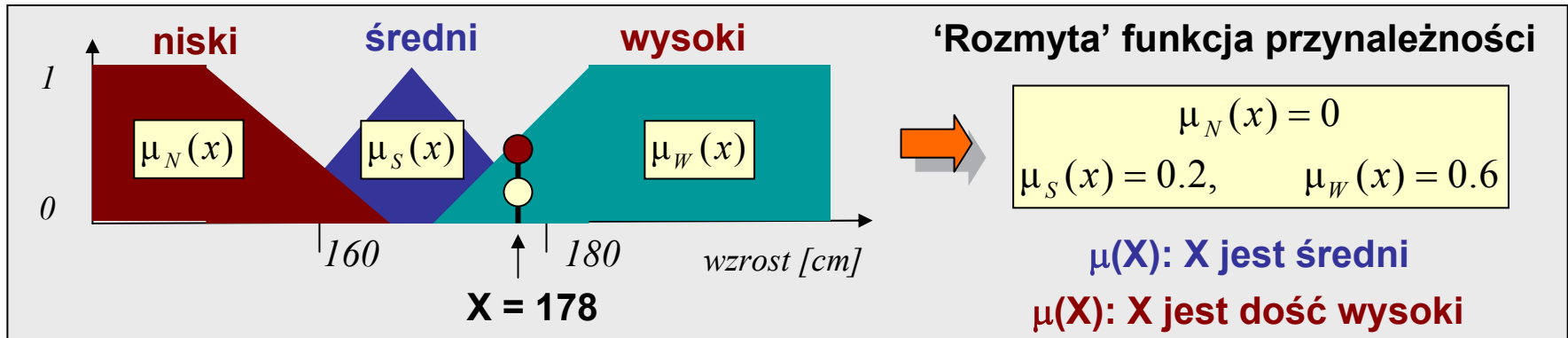
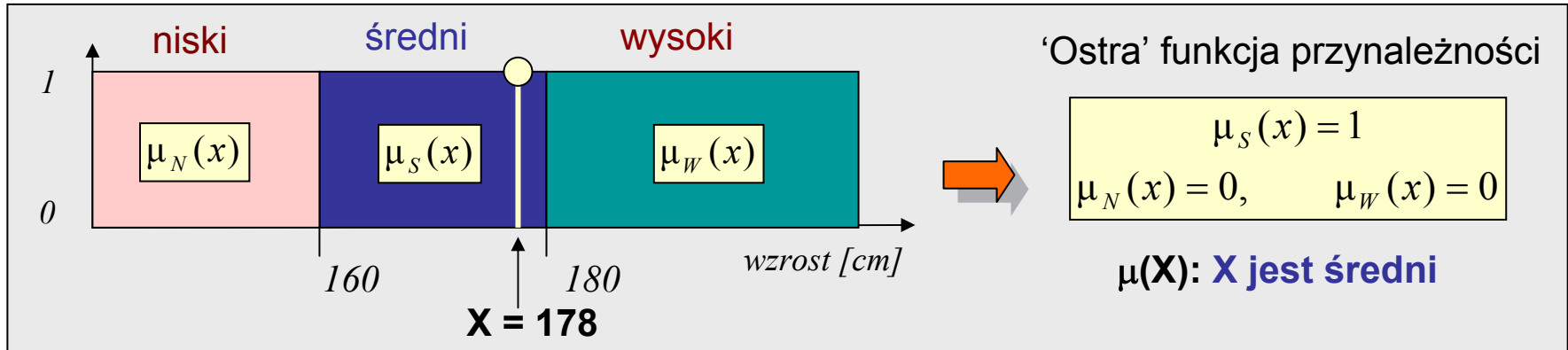


- nieefektywność ścisłej formy opisu w wielu sytuacjach



Wprowadzenie – funkcje przynależności

- Funkcja przynależności – kluczowe pojęcie logiki rozmytej



Typowe funkcje: trapez, trójkąt, sigmoida, krzywa Gaussa, krzywa dzwonowa ...

Zbiory rozmyte

- Określenie dziedziny realizowanych operacji

$$\mu_F(x_i)$$



Funkcja przynależności zmiennej x_i do zbioru F

$$\frac{\mu_F(x_i)}{x_i}$$



x_i należy do zbioru F w stopniu określonym przez $\mu_F(\cdot)$

$$F = \left\{ \frac{\mu_F(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_F(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_F(x_n)}{x_n} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_F(x_i)}{x_i}$$

Zbiór złożony z n elementów o różnych stopniach przynależności

Przykład – zbiór rozmyty liczb „bliskich liczbie 7”

$$F = \left\{ \frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.8}{6}, \frac{1}{7}, \frac{0.8}{8}, \frac{0.4}{9}, \frac{0.2}{10} \right\}$$

Podstawowe operacje logiki rozmytej

- Rozmyte dopełnienie zbioru

$$F_D = \overline{F_1}$$

Dopełnieniem zbioru rozmytego F_1 jest zbiór rozmyty F_D taki, że:

$$\overline{\mu}_{F_D}(x) = 1 - \mu_{F_1}(x)$$

Przykład

Dla zbioru F_1 określonego w X , $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$F_1 = \{ 1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e \}$$

$$F_D = \overline{F_1} = \left\{ \frac{0}{a}, \frac{0.3}{b}, \frac{0.7}{c}, \frac{1}{d}, \frac{0.1}{e} \right\}$$

Podstawowe operacje logiki rozmytej

- Rozmyta suma zbiorów

Definicja sumy rozmytej (OR, unii)

$$F_S = F_1 \cup F_2$$

Sumą rozmytą dwóch zbiorów rozmytych F_1 i F_2 jest zbiór rozmyty F_S określony w następujący sposób:

$$\mu_{F_S}(x) = \max \{ \mu_{F_1}(x), \mu_{F_2}(x) \} = \mu_{F_1}(x) \cup \mu_{F_2}(x)$$

Przykład

Dane są F_1 i F_2 określonych w X , $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$$F_1 = \{ 1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e \}$$

$$F_2 = \{ 0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e \}$$

$$F_S = F_1 \cup F_2 = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{0.9}{b}, \frac{0.4}{c}, \frac{1}{d}, \frac{0.9}{e} \right\}$$

Podstawowe operacje logiki rozmytej

- Rozmyty iloczyn zbiorów

Definicja iloczynu rozmytego (koniunkcji)

$$F_S = F_1 \cap F_2$$

Iloczynem dwóch zbiorów rozmytych F_1 i F_2 jest zbiór rozmyty F_1 określony w następujący sposób:

$$\mu_{F_I}(x) = \min \{ \mu_{F_1}(x), \mu_{F_2}(x) \} = \mu_{F_1}(x) \cap \mu_{F_2}(x)$$

Przykład

Dane są F_1 i F_2 określonych w X , $X = \{ a, b, c, d, e \}$

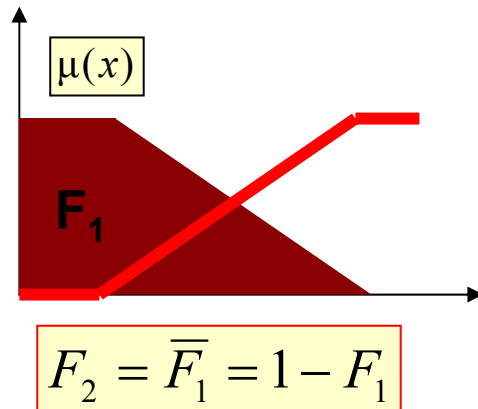
$$F_1 = \{ 1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e \}$$

$$F_2 = \{ 0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e \}$$

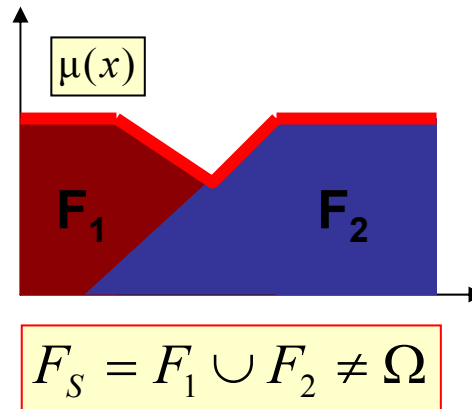
$$F_I = F_1 \cap F_2 = \left\{ \frac{0.2}{a}, \frac{0.7}{b}, \frac{0.3}{c}, \frac{0}{d}, \frac{0.4}{e} \right\}$$

Podstawowe operacje logiki rozmytej

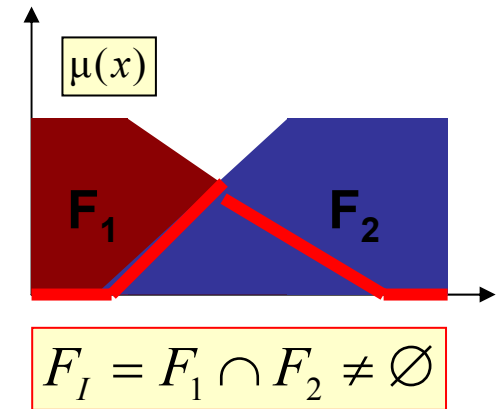
- Logika rozmyta nie spełnia podstawowych aksjomatów logiki zwykłej



Dopełnienie



Suma



Iloczyn

- Bazując na definicjach dopełnienia, sumy i iloczynu rozmytego, można zdefiniować dowolny inny operator logiki rozmytej
- Wykonywanie operacji na zbiorach jest elementem procedury rozmytego wnioskowania

Strategia rozwiązywania problemów

FAZA 1

**Zbudowanie systemu wnioskowania
logiki rozmytej**



FAZA 2

Przeprowadzenie analizy informacji

**Określenie rodzaju i postaci zbiorów
rozmytych odpowiednich dla postawionego
zadania oraz zdefiniowanie reguł
wnioskowania**

**Wykonanie procesu wnioskowania i
wypracowanie wynikowej decyzji**

- Zadania fazy 1: określić jakie argumenty stanowią dane wejściowe, jakie kategorie rozmyte są adekwatne dla ich opisu, jakie reguły wnioskowania można sformułować dla problemu i jak na podstawie oceny spełnienia reguł wypracować ostateczną decyzję
- Zadania fazy 2: Dla konkretnych danych ocenić ich stopień przynależności do wejściowych zbiorów rozmytych, sprawdzić, które reguły są spełnione i podjąć końcową decyzję



Budowanie systemu logiki rozmytej

- Podstawowa strategia wnioskowania: **indukcja**

Reguły decyzyjne logiki rozmytej to implikacje postaci:

jeżeli: A to: B

A : pojedyncza przesłanka lub wyrażenie łączące przesłanki operacjami logiki rozmytej

B : rozmyty zbiór będący elementem przeciwdziedziny problemu (konkluzja)

- Wymagane komponenty określania wiedzy niezbędnej do realizacji zadania (źródło: ekspert, modele empiryczne):
 - zdefiniowanie zbiorów rozmytych dla pojęć stanowiących przesłanki (aby możliwe było wyznaczenie wartości dla wyrażenia **A**)
 - zdefiniowanie zbiorów rozmytych dla pojęć, stanowiących konkluzje (wyrażeń **B**)
 - określenie reguł przetwarzania (konkretyzacja implikacji)

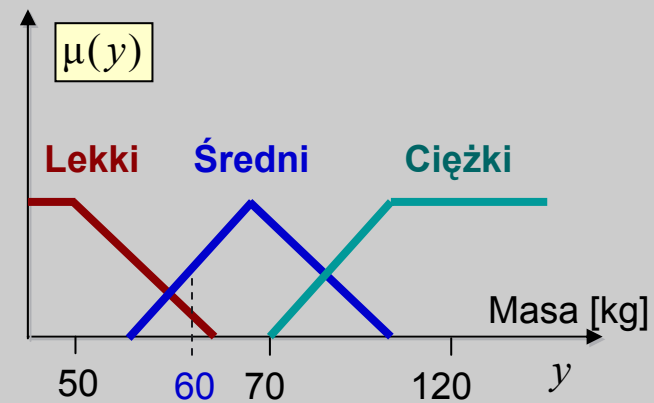
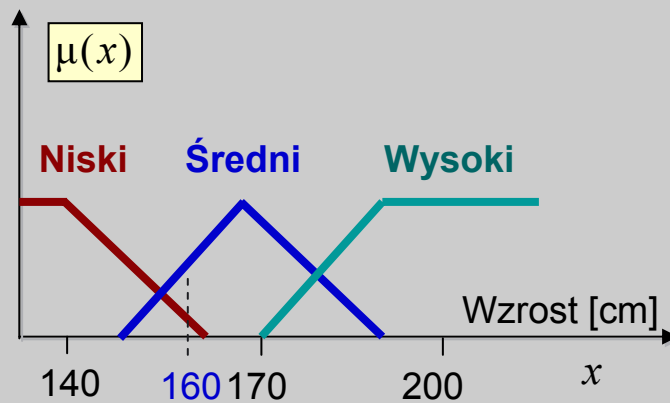
Etapy budowania systemu logiki rozmytej

- Etap 1: Określenie zbiorów rozmytych dla argumentów wnioskowania i zdefiniowanie odpowiednich funkcji przynależności

Przykład:

Ocena tuszy pacjenta na podstawie dwóch przesłanek: wzrostu i masy ciała

Kategorie przyjęte do opisu wzrostu i masy ciała dla mężczyzn



Przykład: zbiór rozmyty „Wzrost” dla argumentu $x=160$ cm:

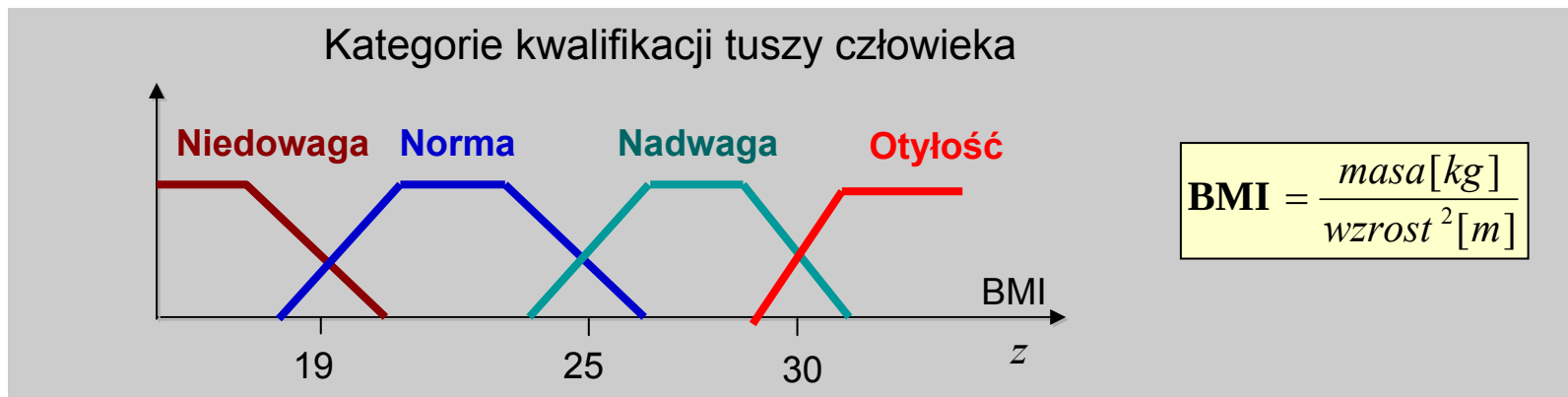
$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0.2 & 0.6 & 0 \\ \text{Niski} & \text{Średni} & \text{Wysoki} \end{array} \right\}$$

Etapy budowania systemu logiki rozmytej

- Etap 2: Określenie zbiorów rozmytych dla możliwych konkluzji wnioskowania
- Następnik reguły (konkluzja) jest kategorią o rozmytym charakterze, określaną dla danego problemu na podstawie posiadanej wiedzy

Przykładowe kategorie – niedowaga, norma, nadwaga, otyłość

Podstawa definiowania kategorii – wykorzystanie BMI (Body Mass Index)



Etapy budowania systemu logiki rozmytej

- Etap 3: Określanie reguł wnioskowania, łączących możliwe skutki z zaistniałymi przyczynami

Przyjęte reguły formułowania oceny tuszy osoby 'k'

- R1: jeżeli k jest niski i k jest lekki to k jest w normie
- R2: jeżeli k jest niski i k ma przeciętną wagę to k ma nadwagę
- R3: jeżeli k jest niski i k jest ciężki to k jest otyły
- ...

Alternatywna forma definicji reguł: **tabela**

Oznaczenia tabeli:

Norma:	0
Niedowaga:	-
Nadwaga:	+
Otyłość:	++

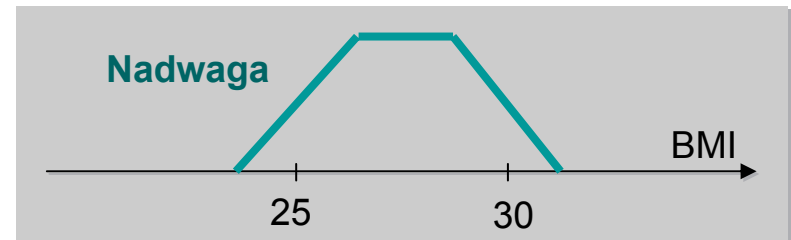
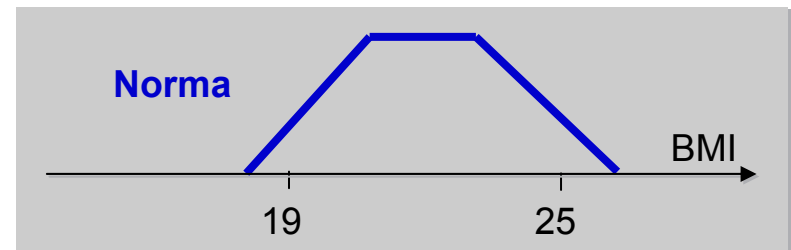
Wzrost \ Waga	N	Ś	W
L	0	-	-
Ś	+	0	-
C	++	+	0

Etapy budowania systemu logiki rozmytej

- Etap 4: Określanie reguł agregacji oceny spełnienia różnych reguł i podejmowanie decyzji
- Wyniki działania reguł to zbiory rozmyte

Reguła R1: **jeżeli** k jest niski **i** k jest lekki **to** k jest w normie

Reguła R2: **jeżeli** k jest niski **i** k ma przeciętną wagę **to** k ma nadwagę



- Wyznaczenie wyniku analizy wymaga agregacji rezultatów działania wielu reguł
- Stosowane metody agregacji: MAX, Mamdami'ego, Takagi-Sugeno.

Przeprowadzanie analiz w logice rozmytej

- Algorytm przekształca ‘ostre’ dane wejściowe na ‘ostre’ rezultaty, bazując na zdefiniowanych dla problemu zbiorach i regułach

Argumenty wejściowe: ‘ostre’

**„Rozmycie” danych wejściowych
(fuzyfikacja)**

Przekształcenie wartości danych, poddawanych analizie na elementy wejściowych zbiorów rozmytych.

Wnioskowanie oparte na bazie reguł

Określenie „siły” każdej z reguł: sprawdzenie w jakim stopniu spełnione są przesłanki reguły i odpowiednio, określenie znaczenia określanej przez regułę hipotezy

**Podjęcie decyzji: ‘wyostrzenie’
wyniku wnioskowania
(defuzyfikacja)**

Agregacja wyników uzyskanych dla wszystkich reguł i wyznaczenie konkretnych wyników analizy

Jednoznaczny wynik (‘ostrzy’)

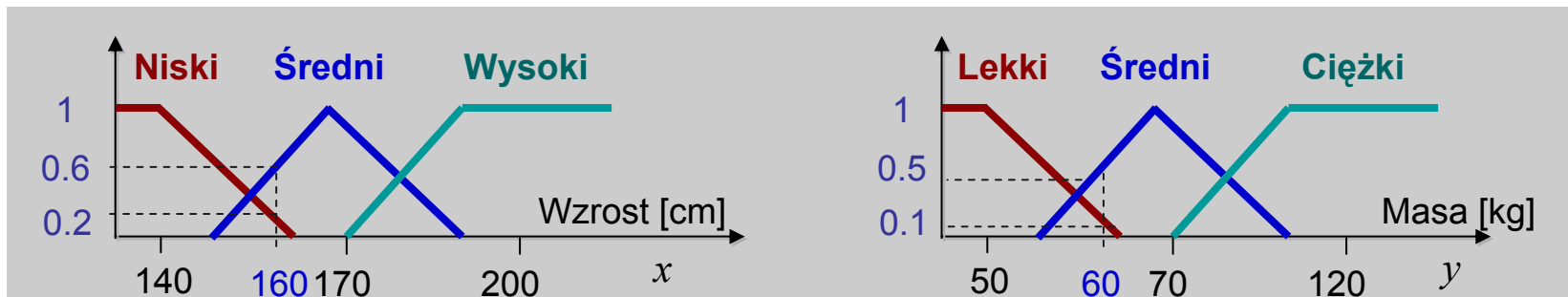
Argumenty rozmyte

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 1: Rozmycie zmiennych wejściowych (fuzyfikacja)

Zamiana argumentów liczbowych na argumenty rozmyte, zgodnie ze zdefiniowanymi dla rozważanych kategorii funkcjami przynależności

Przykład: Dane wejściowe: $x=160$ cm, $y = 60$ kg



Zbiór 'wzrost'

$$\left\{ \frac{0.2}{Niski}, \frac{0.6}{Średni}, \frac{0}{Wysoki} \right\}$$

Zbiór 'waga'

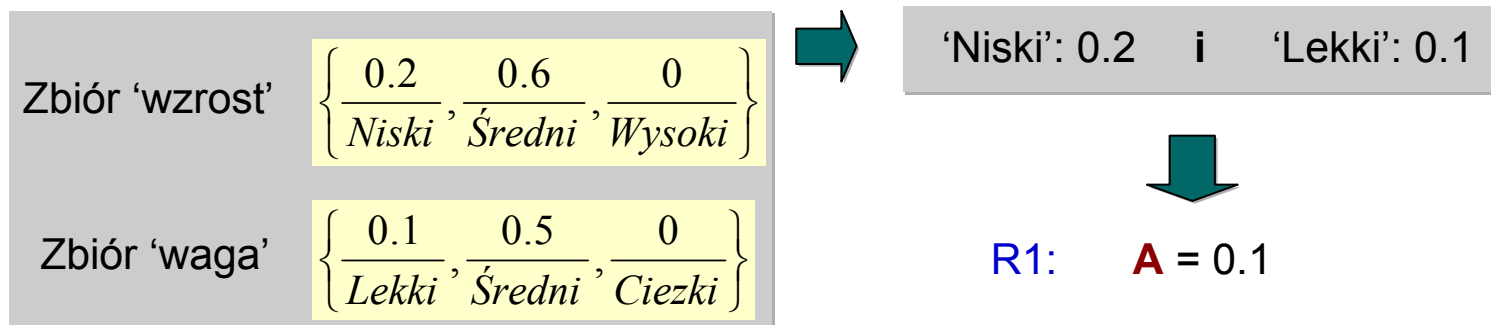
$$\left\{ \frac{0.1}{Lekki}, \frac{0.5}{Średni}, \frac{0}{Ciężki} \right\}$$

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 2: Wyznaczanie wartości przesłanek reguł wnioskowania
Określenie dla każdej z reguł poprzednika implikacji
- Założenie implikacji (**A**) przyjmuje wartości z przedziału $[0 \dots 1]$.

Przykład: Reguła R1: **jeżeli** k jest niski **i** k jest lekki **to** k jest w normie

Dane wejściowe: $x=160$ cm, $y = 60$ kg



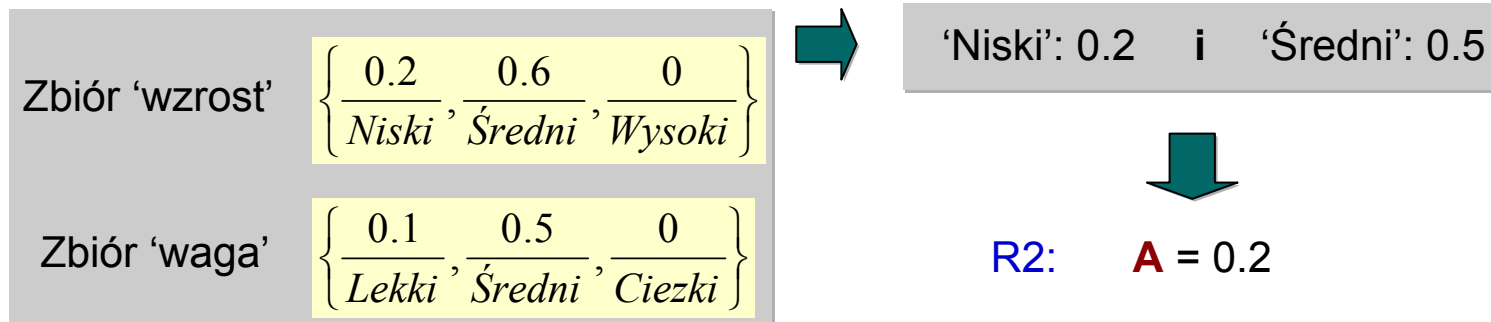
- Jeżeli przesłanka reguły R_i jest większa od zera, mówimy o **aktywacji** reguły R_i

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 2: Wyznaczanie wartości przesłanek reguł wnioskowania
- Dla danych argumentów poddawanych analizie, aktywacji może podlegać wiele reguł

Reguła R2: **jeżeli** *k* jest **niski** **i** *k* ma **przeciętną wagę** **to** *k* ma **nadwagę**

Dane wejściowe: *x*=160 cm, *y* = 60 kg



Reguła R3: **jeżeli** *k* jest **niski** **i** *k* jest **ciężki** **to** *k* jest **otyły**

➡ **A** = 0

Reguła R4: **jeżeli** *k* jest **średni** **i** *k* jest **lekki** **to** *k* ma **nadwagę**

➡ **A** = 0.1

⋮

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 3: Określanie siły reguł wnioskowania

Dane wejściowe: $x=160$
cm, $y = 60$ kg

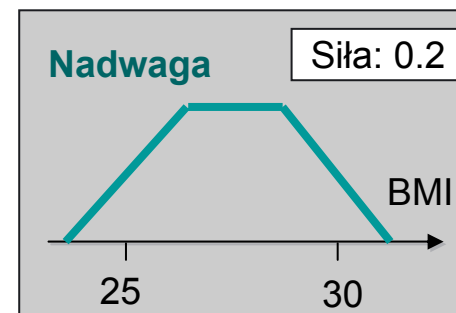
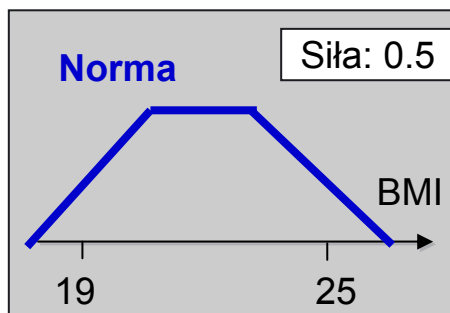
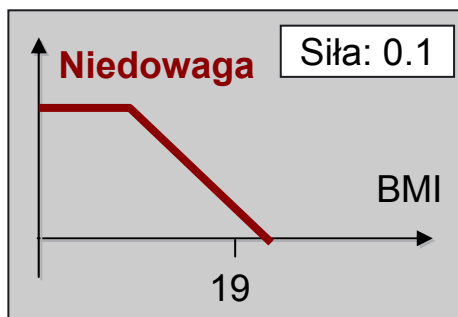
Wzrost Waga	N=0.2	Ś=0.6	W=0
L=0.1	0 (0.1)	- (0.1)	-
Ś=0.5	+ (0.2)	0 (0.5)	-
C=0	++	+	0

- Stopień aktywacji reguły dla danego zbioru danych wejściowych to **siła reguły** dla tych danych.

Siły aktywowanych reguł: $R1=0.1$, $R2=0.2$, $R4=0.1$, $R5=0.5$

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Zastosowanie reguły agregacji hipotez
- Wynikiem analizy reguł jest uzyskanie kilku zbiorów rozmytych (**hipotez**) o różnej 'ważności'



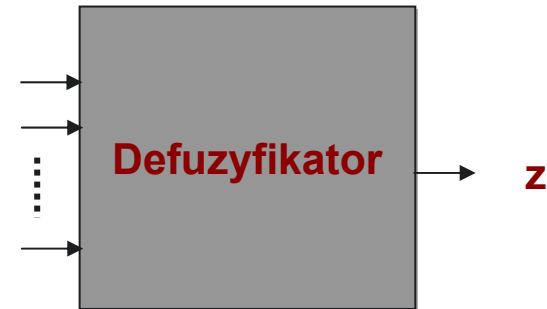
- Efektem analizy informacji zwykle ma być konkretna wartość wynikowa
 - sterowanie pojazdem wymaga jednoznacznego określenia zmiany prędkości i kierunku
 - pacjentowi powinna zostać przepisana konkretna dawka leku
 - ...

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Wyostrzenie (defuzyfikacja) wyników analizy

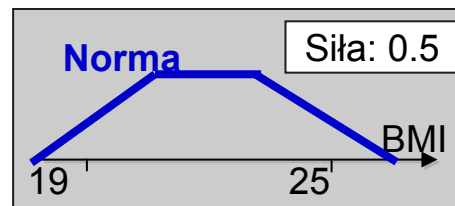
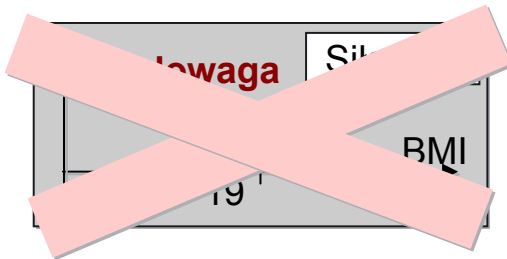
- Reguły defuzyfikacji

- Reguła MAX (maksimum)
- Reguła centroidów (Mamdaniego)
- Reguła Takagi-Sugeno

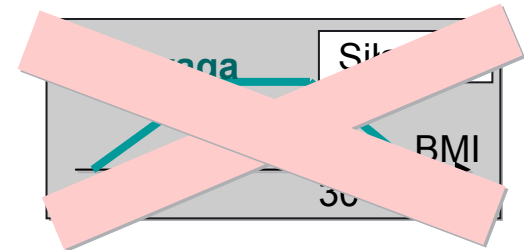


- Reguła MAX

Wynik jest wyznaczany wyłącznie na podstawie dominującej hipotezy – wartością wynikową jest typowo środek przedziału, w którym określona jest funkcja rozmyta

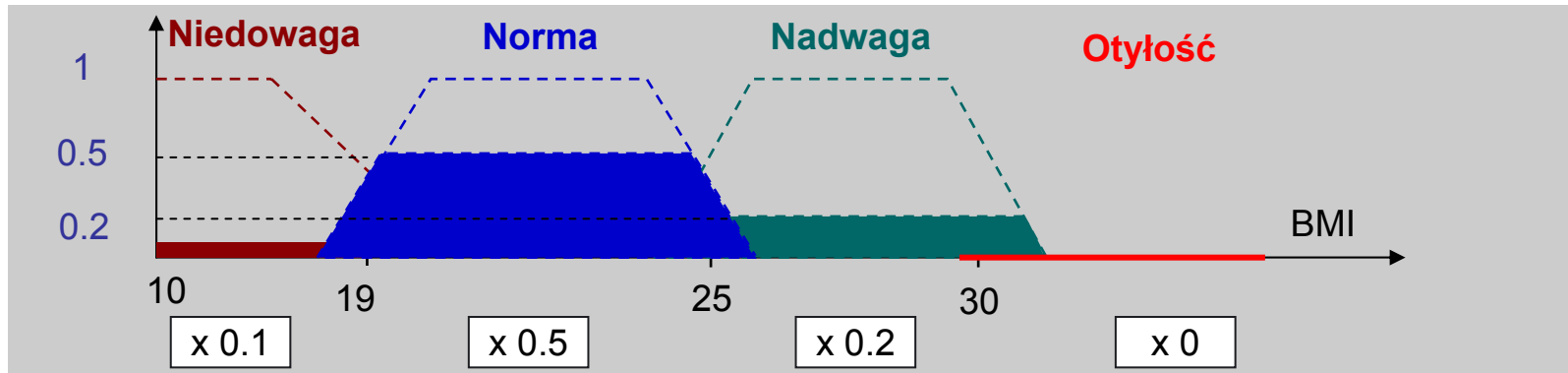


z = 22



Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Defuzyfikacja metodą centroidu (środkła ciężkości)
- Metoda uwzględnia wszystkie uzyskane hipotezy, w proporcjach zgodnych z ich ważnością



Wynik analizy to zbiór rozmyty, o strukturze odzwierciedlającej stopień spełnienia różnych hipotez

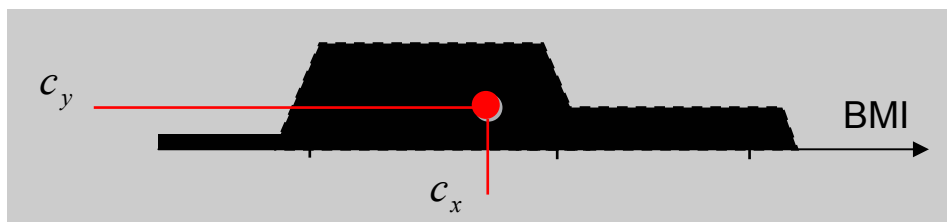


Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Defuzyfikacja metodą centroidu (środką ciężkości)



- Centroid (środek ciężkości) – możliwy kandydat na jednoznaczne podsumowanie podsumowanie uzyskanego zbioru rozmytego
- Środek ciężkości – taki punkt, że skupiona w nim masa obiektu zachowuje się tak, jak obiekt (np. daje równoważne momenty względem obydwu osi)



$$c_x S = M_y$$

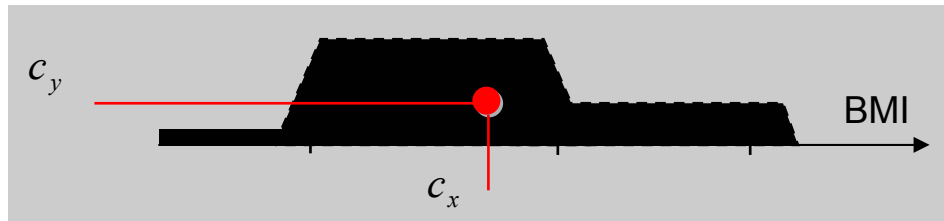
S – pole figury, M_y – moment względem osi pionowej

$$M_y = \int_x x \cdot \mu(x) dx \rightarrow M_y = \sum_i \mu(x_i) x_i$$

$$S = \int_x \mu(x) dx \rightarrow \sum_i \mu(x_i)$$

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Defuzyfikacja metodą centroidu (środką ciężkości)



$$c_x = \frac{\sum_i x_i \mu(x_i)}{\sum_i \mu(x_i)}$$

Przykład

$$c_x \approx \frac{14.5 \cdot 0.1 + 22 \cdot 0.5 + 27.5 \cdot 0.2}{0.1 + 0.5 + 0.2} = \frac{17.95}{0.8} = 22.44 \quad \mathbf{z} = 22.44$$

Wynik analizy hipotez uzyskany metodą MAX:

$$\mathbf{z} = 22$$

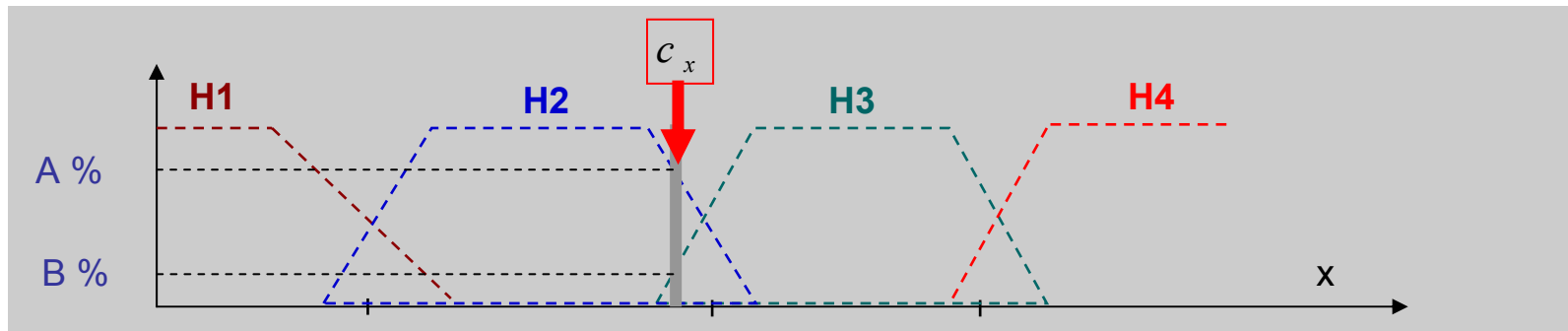
Różnica wynika z różnej ilości uwzględnianej informacji – w drugim przypadku wynik jest bardziej miarodajny

Jednoznaczny wynik analizy danych w systemie logiki rozmytej nazywa się **ostrym indeksem decyzyjnym**

Etapy przeprowadzania analizy

- Etap 4: Rozmyty indeks decyzyjny

Pożądanym wynikiem analizy może być również wskazanie wyznaczonych hipotez, wraz z określeniem poziomu ich wiarygodności, tworzące **rozmyty indeks decyzyjny**



- Rozmyty indeks decyzyjny
 - Hipoteza H2 jest spełniona z poziomem pewności A%
 - Hipoteza H3 jest spełniona z poziomem pewności B%



Podsumowanie

- Korzyści osiągane dzięki logice rozmytej
 - Przejrzystość opisu problemu, reguł wnioskowania
 - Możliwość łatwego zbudowania systemu rozwiązującego trudne zadania
 - Ogromna efektywność obliczeniowa (? 😊)
- Rozważmy przedstawiony przykład: istota – określenie współczynnika BMI dla osoby, na podstawie danych ‘ostrych’ przy użyciu aparatu logiki rozmytej

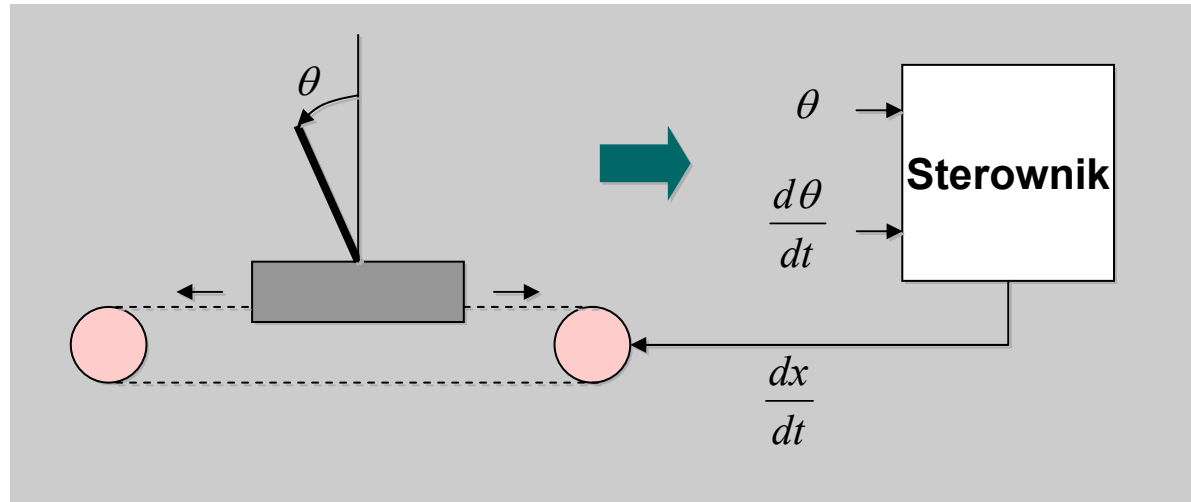
Można to zrobić dużo prościej – wyznaczając BMI z definicji ...

Gdzie jest zaleta logiki rozmytej? 😞

- Przykład: problem ‘odwróconego wahadła’

Podsumowanie – odwrócone wahadło

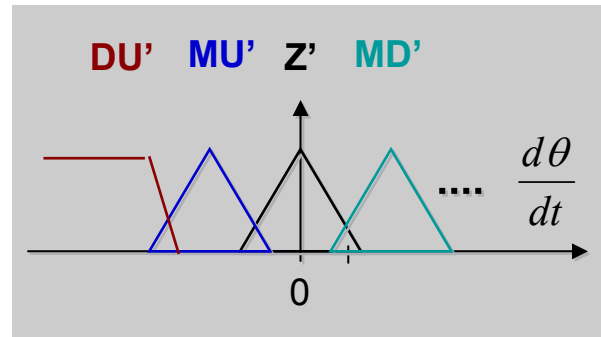
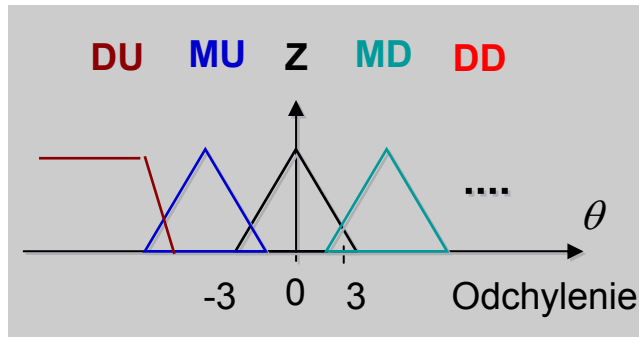
- Cel: zapewnić sterowanie utrzymujące wahadło w pionie



- Podejście 'konwencjonalne' – analityczne: rozwiązywanie równania ruchu – złożone obliczeniowo
- Logika rozmyta: fuzyfikacja, sprawdzenie reguł (k-reguł – k-operacji iloczynu rozmytego), defuzyfikacja: co najmniej rząd wielkości szybciej!

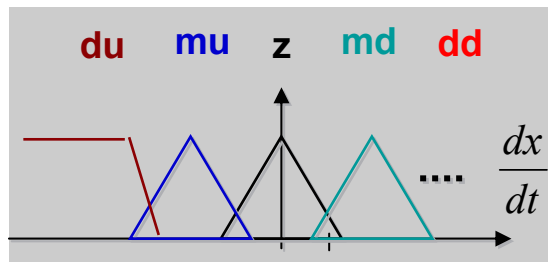
Podsumowanie – odwrócone wahadło

- Opis problemu: zbiory rozmyte wejściowe



Z: zerowe
MD: małe dodatnie
MU: małe ujemne
DU: duże ujemne
DD: duże dodatnie

Zbiory rozmyte wynikowe (hipotezy)



z: zerowe
md: małe dodatnie
...
du: duże ujemne

	DU	MU	Z	MD	DD
DU	dd	dd	md	z	mu
MU	dd	md	md	z	mu
Z	dd	md	z	mu	du
MD	md	z	mu	mu	du
DD	z	mu	mu	du	du

Reguły



Podsumowanie – sterowanie szybkością dozowania leku

- Cel: zapewnić właściwą ilość dostarczanej pacjentowi substancji (np. w kroplówce, mikrodozowniku insuliny)
- Zadanie może być bardzo skomplikowane, bo optymalna szybkość dozowania może zależeć od wielu parametrów aktualnego stanu pacjenta; zależność ta może być prosta lub uwikłana, może zmieniać się w czasie itp.
- Umiejętność sformułowania właściwych reguł i określenia sensownych zbiorów rozmytych pozwala na bardzo szybką realizację sterowania (szybkie reakcje), jednocześnie, pozwala na prostą implementację algorytmu w mikrokontrolerach (elementach mikrodozowników).