

Sztuczna inteligencja/ Logika

Krzysztof Ślot

Zadanie nr ... – Studia podyplomowe „...”



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Prezentacja multimedialna
współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
w projekcie

*„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń
– zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej –
zarządzanie Uczelnią,
nowoczesna oferta edukacyjna
i wzmacniania zdolności do zatrudniania
osób niepełnosprawnych”*



Politechnika Łódzka
Instytut Elektroniki

90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116,
tel. 042 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl



Logika – wprowadzenie

- Logika – formalizacja sposobu rozumowania, język reprezentacji i wykorzystywania wiedzy
- Podstawowy cel logiki
 - **obiektywizacja** procesu wnioskowania
- Znaczenie logiki z perspektywy sztucznej inteligencji
 - **automatyzacja** procesu wnioskowania
- Rodzaje logik
 - logika dwuwartościowa (Boolowska)
 - logika pierwszego rzędu
 - logika wielowartościowa
 - logika rozmyta
 - ...



Logika – wprowadzenie

- Logika Boolowska
 - założenie: świat można opisać za pomocą zdań, którym przypisywana jest jedna z dwóch wartości **PRAWDA (T)** lub **FAŁSZ (F)**
- Warstwy logiki
 - **składnia**: określa poprawną formę zdań
 - **semantyka** (znaczenie): określanie wartości logicznej treści poprawnych zdań
- Elementy składni
 - stałe PRAWDA, FAŁSZ
 - argumenty: zdania proste (pada deszcz, $x=0$, ...)
 - operatory (nieprawda że, i, lub ...)
 - dowolne wyrażenia złożone ze zdań prostych, powiązanych operatorami
 - gramatyka: zbiór reguł używanych do tworzenia zdań (np. operator nie może wystąpić samodzielnie, dwa symbole są zawsze połączone za pomocą operatora itp.)



Logika – podstawowe pojęcia

- Semantyka: znaczenie zdań
 - Przypisanie zdaniom prostym wartości **T** lub **F**
- Zdania złożone – powstają przez agregację zdań prostych, zgodnie z ustalonymi regułami.

Przykładowe zdania proste:

- pada deszcz
- T
- $x > 0$

Ocena logiczna zdań:

- pada deszcz (zależy od interpretacji bieżących warunków przez oceniającego)
- T (zawsze prawda)
- $x > 0$ (prawda, jeżeli x dodatnie, w przeciwnym razie fałsz)

Logika – operatory

- Podstawowe operatory logiki Boolowskiej
 - negacja, iloczyn i suma logiczna

$$(p, q): \quad \neg p, \neg q \quad p \wedge q \quad p \vee q$$

- Definicje operatorów logiki Boolowskiej
 - tablice prawdy

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\oplus$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

...



Logika – wybrane reguły logiki Boolowskiej

- Aksjomaty

$$p \vee \neg p = 1$$

$$p \wedge \neg p = 0$$

- Rozdzielność operacji sumy i iloczynu logicznego (dysjunkcji i koniunkcji)

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Prawa de Morgana

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

- Dowolna operacja logiczna może być wyrażona przy użyciu podstawowych operatorów logiki

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \qquad p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$



Logika – operacje logiczne

- Wartości logiczne zdań złożonych

- Pada deszcz i wieje wiatr
- $x = 1 \vee x \neq 1$
- Jeżeli $x > 2$ to $x^2 > 2x$
- Jeżeli 5 jest liczbą nieparzystą, jabłka rosną na jabłoni
- Jeżeli 5 jest liczbą parzystą Jaś jest wyjątkowo sprytny
- Jeżeli koty lubią mleko i ja lubię mleko to ja jestem kotem
- Jeżeli psy lubią leczyć się u dentysty i ja lubię mleko to ja jestem kotem
- Jeżeli jest dym (p) to jest ogień (q), to jeżeli nie ma dymu to nie ma ognia

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$$

Logika – operacje logiczne

- Aksjomaty

$$p \vee \neg p = 1$$

$$p \wedge \neg p = 0$$

- Rozdzielność operacji sumy i iloczynu logicznego (dysjunkcji i koniunkcji)

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Prawa de Morgana

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Logika – wnioskowanie

- Wyciąganie wniosków z przesłanek:
 - diagnozowanie,
 - przewidywanie,
 - rozumowanie, ...

Data	WIG20	Dow Jones	Nasdaq	Euro/USD	Decyzja
5 lipca	Wysoki , rośnie	Średni, b.z.	Średni, maleje	1.45	Kup ropę
10 lipca	Wysoki b.z.	Średni, maleje	Średni, maleje	1.49	Kup złoto
15 lipca	Wysoki b.z.	Średni, b.z.	Średni, b.z.	1.46	Czekaj
20 lipca	Wysoki, maleje	Średni, rośnie	Średni, rośnie	1.46	Sprzedaj złoto
25 lipca (dziś)	Średni, b.z.	Wysoki b.z.	Niski, rośnie	1.4	???

- Cel postępowania: na podstawie posiadanej wiedzy (znane prawidłowości, fakty) określić wszystkie możliwe wnioski, korzystając z narzędzi oferowanych przez logikę.

Logika – wnioskowanie

- Prosta metodologia wnioskowania – analiza możliwości spełnienia hipotezy na bazie wyczerpującej analizy wszystkich istniejących przesłanek

Założmy, że:

- jeżeli dostanę wypłatę kupię chleb
- jeżeli kupię chleb, zabraknie mi na motorower
- dostałem wypłatę

Czy zabraknie mi na motorower?

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$p$$

Zdanie podlegające ocenie (hipoteza) :

$$y = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p$$



Hipoteza zachodzi gdy:

$$\begin{matrix} p \Rightarrow q = 1 \\ q \Rightarrow r = 1 \end{matrix} \quad p = 1$$



Hipoteza jest więc **spełniona**

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	y
0	0	0	1	1	F
0	0	1	1	1	F
0	1	0	1	0	F
0	1	1	1	1	F
1	0	0	0	1	F
1	0	1	0	1	F
1	1	0	1	0	F
1	1	1	1	1	T

Logika – wnioskowanie

- Prosta metodologia wnioskowania

Założmy, że: jeżeli dostanę wypłatę (p) lub wygram na loterii (s) kupię chleb (q), jeżeli kupię chleb, zabraknie mi na motorower (r) i że dostałem wypłatę. Czy zabraknie mi na motorower?

Zdanie podlegające ocenie (hipoteza) :

$$y = ((p \vee s) \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p$$



Hipoteza jest **spełniona**

p	q	r	s	$p \vee s \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	y
0	0	0	0	1	1	F
0	0	0	1	0	1	F
0	0	1	0	1	1	F
0	0	1	1	0	1	F
0	1	0	0	1	0	F
0	1	0	1	1	0	F
0	1	1	0	1	1	F
0	1	1	1	1	1	F
1	0	0	0	0	1	F
1	0	0	1	0	1	F
1	0	1	0	0	1	F
1	0	1	1	0	1	F
1	1	0	0	1	0	F
1	1	0	1	1	0	F
1	1	1	0	1	1	T
1	1	1	1	1	1	T



Logika – wnioskowanie

- Problem przedstawionej metodologii wnioskowania
 - wzrost liczby zmiennych i liczby warunków czyni procedurę sprawdzania obliczeniowo niewykonalną (wzrost jest wykładniczy)

Wnioskowanie dla 5 zmiennych i 5 operacji – tablica prawdy ma 1024 wiersze, dla 10 wierszy / 10 operacji – ponad milion wierszy itd.

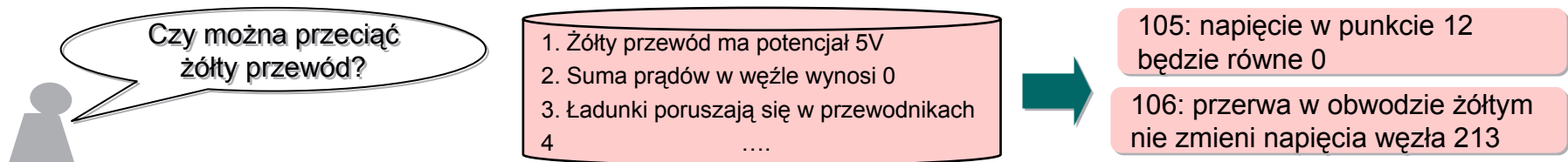
- Problemy złożone - konieczne poszukiwanie innej strategii wnioskowania
- Istota przyjętej strategii – pojęcie wynikania (ang. entailment): określić wszystkie konkluzje jakie wynikają z posiadanych przesłanek
- Metodologia postępowania – zamiast sprawdzania wszystkich możliwych ocen wartości sprawdzanego zdania:
 - zastosować odpowiednie reguły budowania zdań prawdziwych i sprawdzić, czy w uzyskanym zbiorze zawarte jest zdanie poszukiwane
 - przeprowadzić **dowód** hipotezy, kierując generację zdań prawdziwych

Logika – wnioskowanie

- Wnioskowanie: generacja nowych zdań (nowej wiedzy), bazująca na zdaniach istniejących w bazie danych (wiedza) i regułach



- Mechanizm podejmowania decyzji: sprawdzanie, czy w wygenerowanym zbiorze są zdania potwierdzające stawiane hipotezy lub zaprzeczające tym hipotezom.





Logika – wnioskowanie

- Metodologia wnioskowania – budowanie sekwencji zdań:
 - punkt wyjścia – zdania z posiadanej bazy danych
 - zastosowanie odpowiednich reguł indukcji dla budowy zdań $z_{i+1} \dots z_{i+k}$
 - reguły indukcji muszą być **pewne** (generacja zdań na pewno prawdziwych)
 - procedura musi być **kompletna** (by nie pominąć żadnego wniosku, wynikającego z posiadanych informacji)
- Wymagana właściwość reguł indukcji: pewność
 - sposoby przekształcania zdań muszą być niezależne od interpretacji przypisywanej argumentom wykonywanych operacji: zdanie zawsze prawdziwe (**tautologie**) i zdania zawsze fałszywe (**sprzeczności**)
- Podstawowe reguły wnioskowania
 - Modus Ponens ('metoda potwierdzania'), Modus Tolens ('metoda zaprzeczania')
 - Eliminacja iloczynowa, ...
 - Zasada rezolucji i rezolucji jednostkowej

Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Modus Ponens (MP)

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha \Rightarrow \beta$$

Zasada Modus Ponens jest tautologią

α	β	$x = \alpha \Rightarrow \beta$	$y = x \wedge \alpha$	$y \Rightarrow \beta$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(Jeżeli nie ma dymu bez ognia) i (jest dym) to jest ogień

- Modus Tolens (MT)

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg \beta \Rightarrow \neg \alpha$$

Zasada Modus Tolens jest tautologią

α	β	$x = \alpha \Rightarrow \beta$	$y = x \wedge \sim \beta$	$y \Rightarrow \sim \alpha$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

(Jeżeli nie ma dymu bez ognia) i (nie ma ognia) to nie ma dymu

Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Eliminacja iloczynowa (AE)

$$\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \alpha_i$$

- Agregacja iloczynowa (AA)

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \Rightarrow \alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \cdots \wedge \alpha_n$$

- Rezolucja jednostkowa (UR)

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \bar{\beta} \Rightarrow \alpha$$

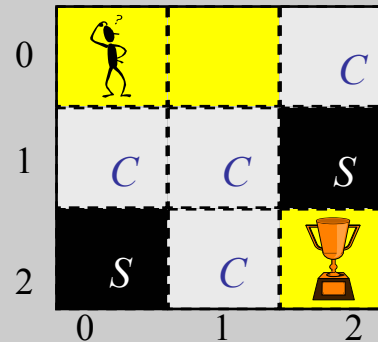
- Modus Ponens, Tolens, eliminacja/indukcja iloczynowa oraz rezolucja jednostkowa pozwalają na budowanie systemów wnioskowania.
- Dowodzenie jest operacją o charakterze ‘mechanicznym’ – procedurą generacji zdań prawdziwych ze zdań istniejącej bazy wiedzy, przy użyciu wymienionych reguł
- Podstawową słabością procedury jest wykładniczy wzrost liczby operacji w funkcji liczby istniejących zdań.

Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Przykładowa procedura wnioskowania: eksploracja ('poszukiwanie skarbu')

Określenie problemu

Cel: zdobyć skarb



Chłód

Studnia

$$f_{ij}^+ / f_{ij}^-$$

Jest / nie ma skarbu

Baza wiedzy

W otoczeniu studni jest chłodno

$$S_{ij} \Rightarrow C_{i,j+1} \wedge C_{i,j-1} \wedge C_{i-1,j} \wedge C_{i+1,j}$$

$$\bar{C}_{ij} \Rightarrow \bar{S}_{i,j+1} \wedge \bar{S}_{i,j-1} \wedge \bar{S}_{i-1,j} \wedge \bar{S}_{i+1,j}$$

Nie wolno ryzykować

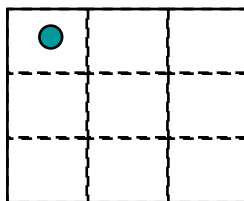
L_{ij} - lokalizacja

$$\begin{aligned} L_{i,j} \wedge S_{i,j+1} &\Rightarrow \cancel{L_{j=j+1}} \\ L_{i,j} \wedge S_{i,j-1} &\Rightarrow \cancel{L_{j=j-1}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Początkowa zawartość bazy wiedzy

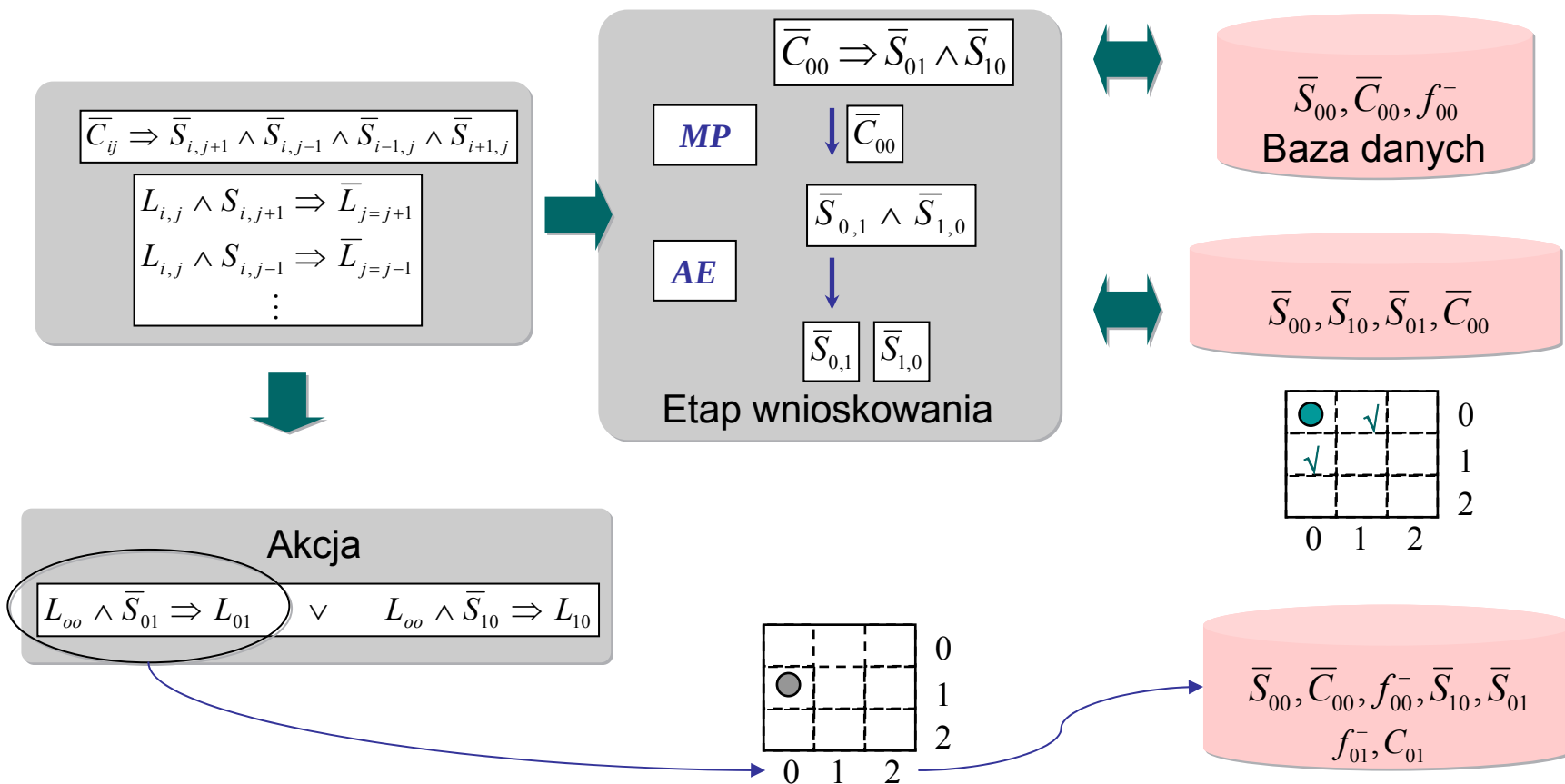
$$\bar{S}_{00}, \bar{C}_{00}, f_{00}^-$$

START



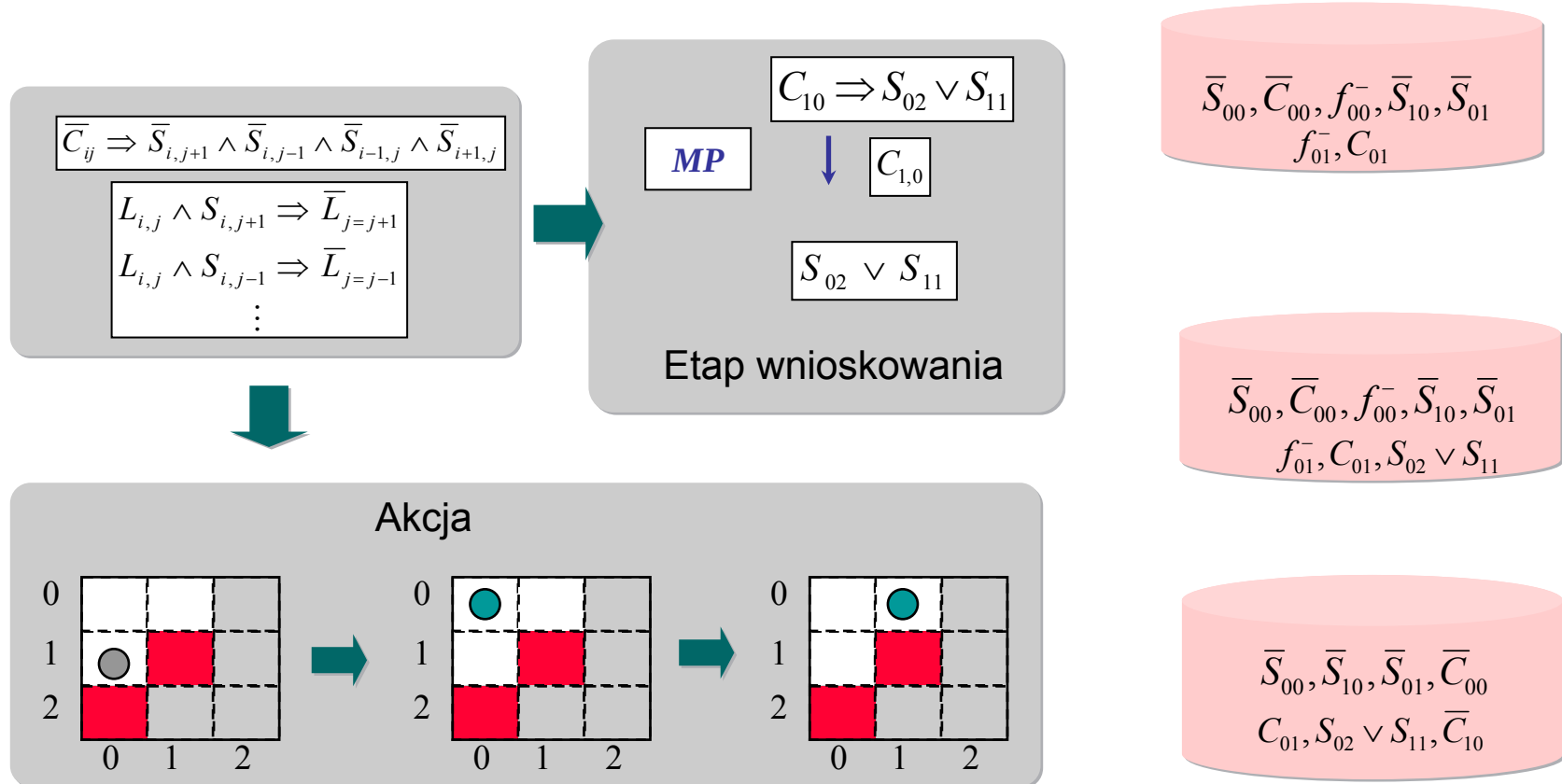
Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Poszukiwanie skarbu – procedura wnioskowania



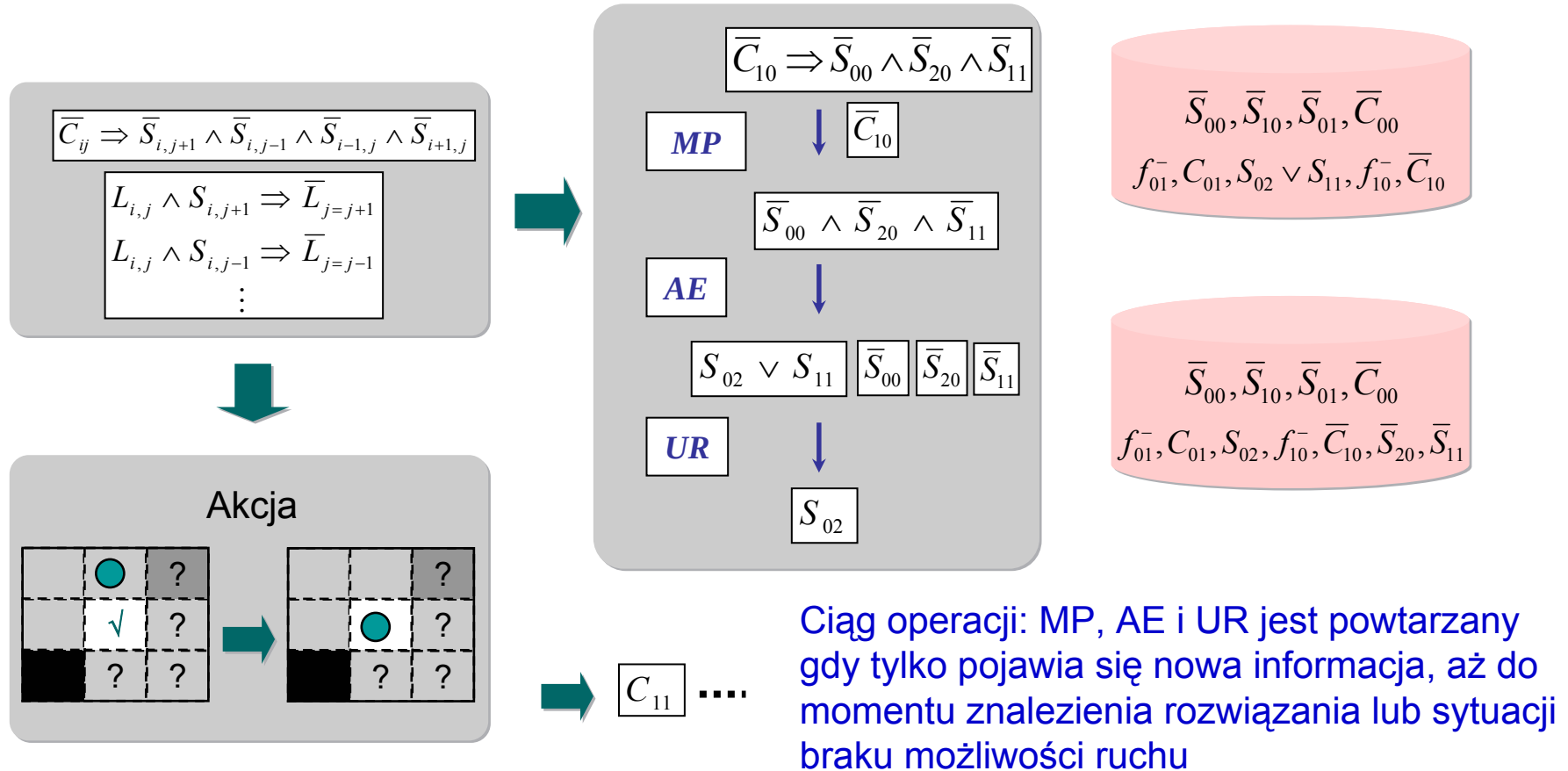
Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Poszukiwanie skarbu – procedura wnioskowania



Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Poszukiwanie skarbu – procedura wnioskowania



Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Zasada rezolucji

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$$

- Zasada rezolucji jest tautologią

α	β	γ	$\alpha \Rightarrow \beta$ (A)	$\beta \Rightarrow \gamma$ (B)	$A \wedge B$ (C)	$\alpha \Rightarrow \gamma$ (D)	$C \Rightarrow D$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Reguły wnioskowania logiki boolowskiej

- Zasada rezolucji stanowi samodzielne, efektywne narzędzie wnioskowania
- Wnioskowanie bazujące na zasadzie rezolucji wymaga konwersji formy zdań do tzw. koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF)

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \quad \longleftrightarrow \quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\bar{\beta} \vee \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \gamma)$$

- CNF

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots) \wedge (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots) \wedge (\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots) \wedge \dots$$

- Każde zdanie logiki da się sprowadzić do postaci CNF
- CNF może być ujęte w postaci ‘klauzul’ – zbiorów, zawierających zmienne:

$$\{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots\}, \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}, \dots\}$$

- Zasada rezolucji to znalezienie w klauzulach tej samej zmiennej

Zasada rezolucji

- Metodologia generacji zdań to poszukiwanie w różnych klauzulach tej samej zmiennej: raz w postaci prostej, raz w zanegowanej, i usuwanie jej, równoważne z tworzeniem nowego zdania

$$(\alpha \vee \beta) \wedge (\bar{\beta} \vee \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \gamma) \qquad \{\{\alpha, \beta\}, \{\bar{\beta}, \gamma\}\} \Rightarrow \{\alpha, \gamma\}$$

- Procedura wnioskowania przy użyciu zasady rezolucji
 - Przekształcenie wszystkich zdań do postaci CNF (klauzul)
 - Zanegowanie dowodzonej hipotezy
 - Generacja nowych zdań i sprawdzenie, czy uzyskano klauzulę sprzeczną z zanegowaną hipotezą: TAK – oznacza dowiedzenie hipotezy, NIE – oznacza brak możliwości dowiedzenia hipotezy

Przesłanki:

- jeżeli pada śnieg jest zimno
- jeżeli jest zimno to zostanę w domu
- pada śnieg

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow r$$

$$p$$

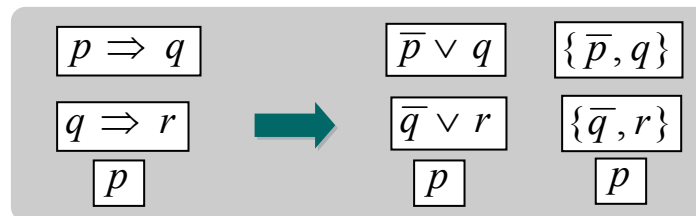
Hipoteza:

- zostanę w domu

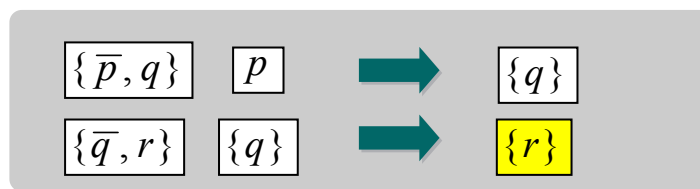
$$r$$

Zasada rezolucji

- Metodologia dowodzenia:
 - konwersja do postaci CNF
 - negacja hipotezy
 - generacja zdań



$\bar{r}$



Uzyskanie sprzeczności kończy dowód: zdanie r wynika z posiadanych przesłanek



Logika pierwszego rzędu

- Logika Boolowska
 - dziedzina problemu to zbiór faktów
 - ten sposób opisu nie przystaje do opisu rzeczywistości i rozwiązywania zdefiniowanych w takim kontekście problemów (świat to fakty, obiekty i relacje między nimi)
- Logika pierwszego rzędu – rozszerzenie logiki boolowskiej o możliwość definiowania obiektów i relacji

x jest człowiekiem: $C(x)$ – ($x=\text{Jasio}$, $x=\text{Archimedes}$, ...)

y jest psem: $P(y)$

x lubi y: $L(x,y)$

- Wprowadzenie kwantyfikatorów
- Reguła wnioskowania – zasada rezolucji



Logika pierwszego rzędu

- Umożliwienie reprezentacji zdań ogólnych – kwantyfikatory

Ogólny $\forall$: “dla każdego”**Szczegółowy** $\exists$: “istnieje”

- Kwantyfikator ogólny oznacza koniunkcyjną relację zachodzącą między argumentami

$$\forall_a \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \dots$$

- Dla reprezentacji wiedzy, kwantyfikatora ogólnego używa się w konstrukcji zawierającej implikację

Wszystkie koty lubią mleko

$$\forall_c \text{Kot}(c) \Rightarrow \text{LubiMleko}(c)$$

- Kwantyfikator szczegółowy oznacza dysjunkcyjną relację między argumentami

$$\exists_a \equiv a_1 \vee a_2 \vee a_3 \dots$$

- Kwantyfikatora szczególnego używa się w konstrukcji zawierającej koniunkcję

Niektóre koty są większe niż psy

$$\exists_c \text{Kot}(c) \wedge \text{WiększyNiżPies}(c)$$



Logika pierwszego rzędu

- Logika pierwszego rzędu pozwala na analizę logiczną zdań formułowanych w języku naturalnym.

Wszyscy ludzie są śmiertelni. Arystoteles jest człowiekiem więc Arystoteles jest śmiertelny.

- Formalizacja opisu:

– Wszyscy ludzie są śmiertelni

$$\forall_x : C(x) \Rightarrow S(x)$$

Stwierdzenie równoważne: dla każdego elementu (x) zachodzi: jeżeli x jest człowiekiem (funkcja 'jest człowiekiem to C – C(x)) to x jest śmiertelny (S(x))

Tego typu zdań nie da się wyrazić w logice Boolowskiej !!!

– Arystoteles jest człowiekiem

$$C(A)$$

– Hipoteza: Arystoteles jest śmiertelny

$$S(A)$$

Logika pierwszego rzędu

- Dowodzenie twierdzeń w logice pierwszego rzędu dokonywane jest przy użyciu zasady rezolucji
- Procedura dowodzenia:
 - Usunięcie kwantyfikatorów
 - Przekształcenie do postaci CNF
 - Negacja hipotezy
 - Sprawdzenie możliwości dowiedzenia sprzeczności

Usunięcie kwantyfikatorów

Jeżeli wyrażenie zachodzi dla wszystkich elementów, zachodzi dla każdego z nich, również dla elementu A

$$\forall_x : C(x) \Rightarrow S(x) \quad \Rightarrow \quad C(A) \Rightarrow S(A)$$

- Przesłanki i konkluzja:

$$C(A) \Rightarrow S(A)$$

$$C(A)$$

$$S(A)$$

Logika pierwszego rzędu

- Przekształcenie przesłanek do postaci CNF

$$C(A) \Rightarrow S(A) \quad C(A) \quad \Rightarrow \quad (\sim C(A) \vee S(A)) \wedge C(A)$$

- Wnioskowanie

Zdania	
$\sim C, S$	
C	
$\sim S$	Teza
S	1,2



Zaprzeczenie tezy dowodzi
prawdziwości wnioskowania

Wszyscy ludzie są śmiertelni.
Arystoteles jest śmiertelny więc.
Arystoteles jest człowiekiem

Zdania	
$\sim C, S$	
S	
$\sim S$	Teza
?	